

DE MUNDI SYSTEMATE

DISSERTATIO

RAYNERII GERBII

PISTORIENSIS

Nil parvum sapias, et adhuc sublimia cures:
Stellae sponte sua, jussaene vagentur, et errent:
Quid premat obscurum Lunae, quid proferat orbem.
HORAT. Epist. XII. L. I.

PISIS MDCCLXXXIX.

EXCUDEBAT ALOYSIUS RAPHAELLIUS.

ALEXANDRO BICCHIERAIO

IN PISANA ACADEMIA

MEDICINAE PROFESSORI



PRAECEPTORI OPTIMO

RAYNERIUS GERBIUS

Quod tenue hoc studiorum meorum specimen exhibiturus maxime in votis habueram, OPTIME PRAECEPTOR, ut illud validissimo quodam patroci-

nio commendaretur, id mihi vel ultra spem accidisse laetandum vehementer, cum Tuo Nomini nuncupatum in lucem prodeat. Nam etsi mea haec de Mundi Systemate lucubratio nullis perfecta est, atque absoluta numeris; maximum tamen inde decus adeptam esse sentio, quod eam benignitate tanta excipere non sis dedignatus. Quantum enim in naturalibus, ac mathematicis disciplinis valeas, quantaque cura eas promovere studeas cum omnes norunt, tum ipse praesertim, qui suavissima consuetudine tua, ac familiaritate diutius usus Te potissimum hortante, ac facem quodammodo praeferente, sublimioris Physicae arcana inquirenda suscepi.

Nil itaque mihi accidere poterat vel honorificentius, quam ut meae hac in Naturali Philosophia nunc primum coeptae meditationes Tibi de Naturali eadem Philosophia optime merito non improbentur; vel dulcius, quam ut grati animi, et obsequentissimi amoris mei pignus Tibi publice exhibere licuerit.

INDEX

ΟΙΔ' ΟΤΙ ΘΝΗΤΟΣ ΕΓΩ, ΚΑΙ ΕΦΗΜΕΡΟΣ. ΑΛΛ' ΟΤΑΝ ΑΣΤΡΩΝ
ΜΑΣΤΕΥΩ ΠΥΚΙΝΑΣ ΑΜΦΙΔΡΟΜΟΥΣ ΕΛΙΚΑΣ
ΟΥΚΕΤ' ΕΠΙΨΑΥΩ ΓΑΙΗΣ ΠΟΣΙΝ· ΑΛΛΑ ΠΑΡ' ΑΥΤΩ
ΖΗΝΙ ΔΙΟΤΡΕΦΕΟΣ ΠΙΜΠΛΑΜΑΙ ΑΜΒΡΟΣΙΗΣ

Πτολεμ.

DE VERO MUNDI SYSTEMATE

DISSERTATIO.

I. ET ſi corporum, quibus adſpectabile hoc Univerſum conſtituitur, phaenomenorumque, quibus tam mirifice variatur, obſervatione tota conſtat Naturalis Philoſophia, ea tamen vix formari primum, nunquam autem longe promoveri poterit, niſi & quo ordine ipſa corpora in mundano ſpatio Natura poſuerit, & qua ratione phaenomenis ſaltem majoribus dederit ortum antea conſtiterit. Ex hoc autem intelligitur, quanti momenti ſit in tota Phyſica de Mundi Syſtemate doctrina. Et quidem eam condere ab antiquiſſimis uſque temporibus multi contenderunt; ſed adeo plerumque aberravere a Natura, ut eam potius turpiter peſſumdediſſe, quam ejus opus, artemque explicaſſe cenſendi ſint.

Cum itaque immortali Clementissimi Principis Petri Leopoldi D. N. beneficio in Extraordinariorum hujusce Academiae Professorum numerum fuerim cooptatus, sintque meae idcirco partes de gravi aliquo argumento physico publice primum verba facere, scriptura deinde commentari, postremo theses ponere, & tueri; illico Verum Mundi Systema occurrit animo, quod & in tanta opinionum pravitate, ac diversitate seligerem, & coram Vobis (1), praestantissimi Patres, Auditores optimi, demonstrarem; id enim & aperiundae, sternendaeque ad Physicam viae in primis necessarium, & vestra auctoritate maxime dignum judicavi.

II. Si

(1) Dissertatio haec detractis calculis, & iis, quae ad Satellitum inaequalitates, & Aequinoctiorum Praecessionem pertinent habita est in Magno Pisani Lycaei Auditorio, cum Auctor Naturalis Philosophiae Publici Extraordinarii Professoris munus auspicaretur.

II. SI quae praejudicata opinio altas in hominum mentibus jacere potuit radices, ea est, qua Tellus in Universi Centro locatur, quam circum Sol, & sidera omnia quibusdam in circulis revolvantur. Sed licet sententia haec vulgi suffragia nullo non tempore consequuta sit, nec Astronomi defuerint, qui eam coelestibus explicandis phaenomenis quodammodo accommodaverint, quos inter primas occupat Ptolemaeus; tamen non sero quidem a sagacioribus Philosophis rejecta est. Id autem an ex eo factum sit, quod sublimiora Astronomiae dogmata lapideis ab Antediluvianis insculpta columnis (2) cito per uni-

(2) Sententiam hanc multa quidem eruditione, confirmare nititur Baillyus. *Hist. de l'Astr. Anc.* Et quidem exorientis post universale Diluvium Astronomiae monumenta perscrutantibus singulare illud occurrit, quod sublimiores quaedam notiones diffitos apud Populos Indos, Aegyptios, Tartaros, Chaldaeos, Cinenses, Persas nullo nec commercii, nec alio quovis vinculo conjunctos uno, eodemque tempore invaluerint. Eae autem vel diuturnioribus observationibus, vel perfectiorum instrumentorum ope, vel sagacissima argumentatione comparari tantum potuerunt. Cum vero notiones hujuscemodi cito post universale Diluvium prolatae fuerint, nec postdiluvianos Astronomos perfectioribus instrumentis usos fuisse constet; aliunde autem sagacissimae argumentationis facultas iis tribui non possit, ut pote

versam terram diffusa sint; an vero, quod assidua coelestium phaenomenorum observatio aliam, longeque meliorem de Mundi Systemate opinionem excita-

---

qui praestantissimis veritatibus fabulosa multa, ridicula, falsa, superstitiosaque permiscuerint, collegit inde Baillyus, vetustissima Astronomiae dogmata ab iis detecta non fuisse, a quibus post universale Diluvium primum dignota. Ex quo ea antediluvianae Astronomiae, quae summum fortasse perfectionis apicem attigerat monumenta esse censuit, ideoque plenam adhibendam esse fidem Josepho Flavio, qui haec habet de Sethi nepotibus. Ουτοι.... σοφιαντε την περι τα ουρανια.... επενοησαν. Υπερ δε τυ μη διαφυγειν τους ανθρωπους τα ευρημενα, μη δε πρειν εις γνωσιν ελθειν φθαρηναι· προειρηκοτος αφανισον Αδαμου των ολων εσεσθαι, τον μεν κατ᾽ ισχυν πυρος, τον ετερον δε κατα βιαν, και πληθυν υδατος· Στηλας δυο ποιεησαμενοι την μην εκ πλινθου, την δ᾽ ετεραν εκ λιθων αμφοτεραις ενεγραψαν τα ευρημενα. Ιν᾽ ει και συμβη την πλενθενην αφανισθηναι υπο της επομβριας η λιθινη μενασα παρασχη μαθειν τοις ανθρωποις τα εγγεγραμμενα δηλουσα, και πλινθινην δε υπο αυτων ανατεθηναι. „ Illi.... tum sapientiam circa coelestia . . excogitarunt. Ne autem illa inventa homines effugerent, & antequam venirent in notitiam interciderent (cum rerum omnium interitum fore alterum quidem ignis vi, alterum vero per violentiam, & multitudinem aquarum praedixisset Adamus) columnis duabus extructis, una quidem ex latere, altera vero ex lapidibus inventa *sua* utrique inscripserunt. „ Ut si eveniret lateritiam inversam iri per imbrium vim, lapidea superstes ostenderet hominibus *astronomica* inscripta, simulque indicaret, et lateritiam ab illis positam fuisse. „ *Jos.*

tarit nec facile dixerim, nec dixiſſe operae pretium eſt. Quidquid enim hac de re ſentire velimus, certum eſt Planetarum omnium, & Telluris ipſius circa Solem motum quamplurimos e veteribus Philoſophis dignoviſſe. Latent quidem pleraeque veterum Philoſophorum ſententiae, injuriaque temporum obliviosſae noctis caligine obducuntur; verum tanta earum fragmenta ſuperſunt, quae quid ipsi ſenſerint abunde ſatis, luculenterque declarant.

III. Et re quidem vera Mercurium, ac Venerem circa Solem revolvi Aegyptii cenſuerunt (3), apud quos, non ſecus ac apud Indos, Cinenſes (4), Aethiopes, ac Chaldaeos plures alias hac de re notiones ſeptem-

---

Fl. l. 1. c. 2. El. Hav. p. 11. Omnia autem haec & apud Euſebium (*in Ch. l* 1.) a Manethone habentur, qui vel ulterius etiam progreditur, easque aſtronomicas notiones a primo ex Mercuriis celeberrimo illo Aegyptiorum *Thoth* lapideis columnis ſacerdotalibus insculptas notis in Serum regione Graeco, vel potius, ut Jablonskius optime animadvertit, vernaculo sermone redditas teſtatur ab Agathodaemone secundi Mercurii filio. (*V. Syncel p.* 40. *Am. Mar. l.* 22. *Jablonskium l.* 5. *c.* 5. *Abulpharag. Hiſt. Din. p.* 6. *Bailly Hiſt. de l' Aſtr. Anc. Eclairciſſements l.* 1.)

(3) V. *Bailly l. cit.*

(4) Pater Gaubilius ad Patrem Soucietum scripſit de Telluris motu doctrinam apud Cinenses 300. an. ante Jesum Ch. innotuisse. V. *Bailly p.* 317.

ſeptemtrionalibus fortaſſe plagis primum derivatas (5) invaluiſſe putandum eſt, quae vel arcano Templorum horrore concluſae, lapideiſve columnis hieroglyphicis in-

(5) Quae non multis poſt universale Diluvium, elapſis saeculis diſſitas apud Gentes ſublimioris Aſtronomiae dogmata occurrere superius innuimus (*Nota* 2.) in eam Baillyum induxere sententiam, ut crederet, ea vetuſtiorem quemdam Populum antediluvianae Aſtronomiae monumentis lapidea inſtructum columna dignoviſſe, ex quo Indi, Cinenses, Aegyptii, Chaldaei, aliique cum origine ſimul receperint. Vetuſtiori autem huic Populo Syriam eumas praebuiſſe cenſeri poſſet ex eo, quod de hac columna Josephus scripserit (*l. c.*) Μενει δ' αχρι του δευρο κατα Γην την Σιριαδα. Multa autem profert Baillyus, quae Manethonis potius sententiam confirment columnam hanc in Serum regione conſtituentis, et Aſtronomiam in ſeptemtrionalibus plagis primum excultam fuiſſe declarare videantur. Et quidem non omnes Interpretes communem Josephi lectionem recipiunt. Hadrianus sane Relandus apud Havercampum in notis ad relata verba ait „ Σηριαδα *Terram Serum* mallim legere, uti Syncellus, & „ Manethos legerunt. *Siriam* nunquam vocat *Siriada*. Sic & „ capite VII. infra Συριαν vicinam Indiae facit: Crediderim, „ & ibi Σηριαν legendum „. In Zoroaſtri autem libro Aſtronomicorum omnium vetuſtiſſimo legitur „ Longiorem aeſtivam diem brevioris hyemalis duplam eſſe „ (*Zend-Aveſta traduit par M. Anquetil T. 2. p.* 400.) Cum itaque sub uno tantum Aequatoris parallelo 49.° id fieri poſſit, ubi maxima dies habetur 16. horarum minima 8, ibi observationes suas Zoroaſtrum inſtituiſſe putandum videtur.

insculptae notis tunc potissimum deperditae sunt, cum sacerdotalis traditio, earumque notarum intelligentia deperiit. Sublimibus enim Astronomicarum rerum notionibus Graeci Philosophi commendantur, quas sedulitatis ad eas comparandas necessariae impatientes non aliunde recipere potuerunt, quam ab Orientis Populis, quos propter planitiem, magnitudinemque regionum, quas incolebant, cum coelum ex omni parte patens, atque apertum intuerentur, trajectionibus, motibusque stellarum observandis assiduam dedisse operam compertum est.

IV. Quos inter primum recensendi sunt ii, quibus vetustissima Sectarum Jonica praesertim gloriatur. Et in ea quidem de siderum gravitate doctrinam Thales Milesius constituit (6), Telluris circa Solem motum aperte asseruit Anaximander (7); eorumque opiniones per Anaximenem ad Anaxagoram usque pervenere, qui coelum vehementi quodam circuitu constare dixit, remissione lapsurum (8). Ille autem no-

ve

(6) V. *Greg. El. Astr. Phys. in Praef.*

(7) Telluris circa Solem motum detexisse Anaximandrum testatur Aristoteles ex veteri Astronomiae historia ab Eudemo conscripta, cujus fragmentum ab Anatolio Laodiceae Episcopo conservatum refert Fabricius in Bibl. Grae. *l.* 3. *c.* 11.

(8) V. *Diog. Laer. in Vit. Anax. n.* 8.

verat immobilem Solem, quem non ſine maximo vitae diſcrimine apud Athenienſes Deorum numero excerpſit, ignitamque Petram (9) nuncupavit, eo fortaſſe vulcanico lapide in errorem inductus, quem coelo in Thraciam delapſum Plinius memorat, Diogeneſque Laertius. Haec ab Anaxagora accepta pro certis habuerunt Archelaus (10) Pericles, & Euripides (11) ipſe

---

(9) V. *Diog. Laer. l. c. & in Dem.* Has opiniones Anaxagoras ab Anaximene Praeceptore suo acceperat, quem eadem de cœlo docuiſſe teſtatur Stoboeus. *Eccl. Phy. c.* 25.

(10) V. *Stoboeum l. c.*

(11) V. *Diog. Laer. in Vita An.* Rotationis etiam motum Soli Euripidem tribuisse crediderim ex eo, quod in Oreſtis Acto tertio Electram ita loquentem inducat (*v.* 980.)

Μολοιμι ταν ουρανου μεσον και χθονος
Τεταμεναν αιωρημασι
Πετραν αλυσεσι χρυσεαισι φερομεναν
ΔΙΝΑΙΣΙ . . . . . .
„ Utinam vadam ad coelum inter & Terram
„ Appensam elevationibus
„ Petram catenis aureis circumactam
„ Vorticibus . . . .

Hoc idem & Democritus praedicavit, de quo Stobœus haec habet: Δημοκριτος (ηλιον εφη) μυδρον η πετρον διαπυρον τροπην δε γιγνεσθαι εκ περιφερειας αυτου. „ Democritus (*ſolem dixit*) ferrum, vel saxum candens, quod rotatione sua converteretur.

ipſe, qui licet a philoſophicis ſtudiis Magiſtri periculo deterritus, ea tamen in Tragoediis non raro tetigit, ut in Oreſte, ex iis, quae ſuperſunt, & in Phaetonte, teſte Laertio.

V. Quae quidem omnia ex Jonica in Italicam deinde Scholam fortaſſe defluxerunt. Ejus ſiquidem Sectatores eodem modo gravitatem fieri in Solem cenſuerunt, quo in Terram (12), & Planetam quemque tanquam lapidem in funda circumagitatum (13) ob hanc ipſam rationem in orbita ſua retineri, ſemperque circa Mundi centrum verſari. Mundi autem centrum in Sole Pythagoram locaviſſe multa confirmant; arcana licet exorientis Italicae Sectae dogmata eo Philoſophum illum honore privarint, quem ſibi poſtea vindicarunt Pythagorici. Quos inter Philolaus primus omnium palam docuit, Tellurem circa Mundanum Ignem per obliquum orbem circumferri (14). Ille autem

(12) V. *Plutarc. de Facie in or. Lu.*

(13) V. *Plut. ib.*, & *Greg. l. c.*

(14) Φιλολαος ὁ Πυθαγορειος κυκλῳ περιφερεσθαι (την γην) περι το πυρ κατα κυκλου λοξου ὁμοιοτροπως ἡλιῳ, και σεληνῃ. *Plut. de Plac. Phil. l.* 3 *c.* 13. Ea verba ὁμοιοτροπως ἡλιῳ, και σεληνῃ Plutarchi errori tribuit Baillyus, & Ariſtotelis (*de Coel. l.* 2. *c.* 14.) teſtimonio innixus arbitratur Philolaum dixisse, Tellurem motus eos abſolvere, qui Soli tribuuntur. *l. c. p.* 449

tem patria extorris quae vices, quaeque bella Philoſophos opinionem hanc praedicantes manerent nimis heu vere portendit. Eum quidem ſubſequutus Ariſtarchus Samius parum abfuit, quin a Cleanthe violatae religionis poſtularetur, quod Lares Univerſi, Veſtamque ſuo loco moviſſet (15).

Ii vero non modo Tellurem per obliquum evolvi circulum, ſed & circa ſuum axem interim verſari putarunt. In quam ſententiam Eritraeum Seleucum, Heraclidem Ponticum, Ecfantum, (16) Syracuſiumque Nicetam alacriter deſcendiſſe (17) hiſtoriarum monumenta confirmant.

VI. Haec autem opinio adeo praeſtantioribus vetuſtatis ingeniis probata fuit, ut vel in ipſam Academiam pervadere potuerit. Theophraſti enim apud Ciceronem, & Plutarchum (18) teſtimonio compertum

(15) V. *Plutarchum de Facie in orbe Lunae p.* 922, 923, ubi *Cleanthis* loco *Ariſtarchum* legendum eſſe Interpretes ajunt, de quo Archimedes (*in Arenario*) teſtatur, quod υποτιθεται τα μεν απλανη των αστρων, και τον αλιον μενειν ακινητον· ταν δε γαν περιφερεσθαι περι τον αλιον κατα κυκλω περιφερειαν = Supponit inerrantia quidem sydera, & Solem manere immobilem: Terram autem ferri circa Solem per circuli circumferentiam =.

(16) V. *Plut. l. c.*

(17) V. *Cic. Ac. Quaeſt. l.* 4. § 39.

tum est, Platonem illum quasi quemdam Deum Philosophorum jam natu grandem poenitentia fuisse ductum, quod Terram in Medio Universi non suo loco collocavisset. Ille sane, magno Philolai libris pretio comparatis, ex iis Timoeum contexuit, in quo Pythagoricam de Telluris motu doctrinam exposuit, licet paullo obscurius (19).

 VII.

---

(18) In Quaestionibus Platonicis haec refert Plutarchus: Θεοφραστος δε και προιστορει, τῳ Πλατωνι πρεσβυτερῳ γινομενῳ μεταμελειν, ως ου προσηκουσαν αποδοντι τῃ γῃ την μεσην χωραν του παντος. V. *Aeg. Menag. Obs. in Diog. La. l. VIII. Segm.* 85. *Ed. West. p.* 389, ubi multa proferuntur, quae opinionem hanc confirmant validissime.

(19) Hac fortasse obscuritate deceptus Corsinius in suis ad Plutarchum *De Pl. Phil.* notis contra Gassendum asseruit, de Telluris motu doctrinam nullatenus Platoni fuisse probatam. *Diss. I. p. XXXIV.*

Quae a Corsinio rationum momenta proferuntur ad duo potissimum capita reduci possunt. 1. Nullum ex iis, quibus Plato in Timoeo usus est verbis desumi potest argumentum ad Gassendi sententiam confirmandam: quid autem Plato senserit non ex Veterum testimonio, sed ex superstite potius Timoei libro deduci debet. 2. Plato in Timoeo, in Epinomide, & in VII. lib. de Legibus sidera circa Tellurem revolvi dicit, quod *temere* ad solum vulgi captum a Platone dictum Gassendus existimaret, cum ibi plurima vulgo prorsus impervia Plato protulerit.

Sed, doctissimi viri pace dixerim, ejusmodi argumenta leviora sunt

VII. Ea autem ex Academia proficiſcens per amoenas illas Lycaei Porticus non ingrata perſonuit (20).

Nec

certe, quam ut ex iis Theophraſti, Ariſtotelis, Plutarchi, aliorumque e veteribus auctoritas perfringatur. Et re quidem vera Platonem ex Philolai libris, in quibus Pythagoricae Philosophiae dogmata potiſsimum continebantur, Timoeum excripſiſse ex Auli Gellii, & Tzetzae teſtimonio compertum eſt. Quorum alter (*l. 3. c. 17.*) inquit „ Exque eo (*libro Pythagoricae do-* „ *ctrinae*) Timoeum . . . . (*Plato*) contexuit „. Alter autem *Chil. X. Hiſt.*

Αφ' ἐ (του Φιλολαυ βιβλιδιυ) γραφει τον Τιμαιον . . ὁ Πλατων

Quae igitur de Mundi Systemate Philolai erat opinio, ea & Platonis in Timoeo eſſe debuit. Philolaum vero primum omnium Pythagoricorum Telluris motum praedicaſse superius vidimus (n.° V.), ubi pariter demonſtratum fuit, vim Planetarum centripetam erga Solem Italicos Philosophos dignoviſſe.

Quanta autem cura, quantaque diligentia quae communibus adversarentur opinionibus sententias veteres Philosophi celare ſtuduerint, nullus in hiſtoria tam rudis eſt, qui ignoret. Ex quo factum eſt, ut quae vel invidiam excitare, vel novitate imperitiores offendere poſſent eas aut voce tantum discipulis tradiderint, aut obscura quadam ediderint verborum ambage conscriptas. (*V. Bailly Hiſt. de l' Aſtr. Anc.*) Fruſtra hinc manifeſtam quis, apertamque lucem in veterum Philosophorum scriptis re-

Nec vero & Archimedem (21), & alios perplures in nullius Magistri verba jurare addictos Philosophos hujusmodi latuit opinio, eamque ii vel quam am-

---

quirat; ac quid ipsi senserint cum ex eorum discipulis facilius percipi possit, ex iis potissimum exquirendum est.

Si ergo Platonis verba Telluris motum innuere posse videantur, plena erit Theophrasto, & Aristoteli praesertim Platonis ipsius auditori fides habenda. Jam vero haec ea sunt: *Γην δε τροφον μεν ημετεραν ειλυμενην δε περι τον δια παντος πολον τεταμενον φυλακα, και δημιυργον νυκτος τε, και ημερας εμηχανησατο πρωτην, και πρεσβυτατην σωματων, οσα εντος ουρανυ γεγονε.* Quae Platonis verba ita Cicero (*de Univer.*) interpretatur: „ Jam vero Terram altricem „ nostram, quae trajecto axe sustinetur diei, noctisque effectri- „ cem, eamdemque custodem antiquissimam corporum voluit „ esse eorum, quae intra coelum gignerentur. „

Primo itaque ex eo quod Plato Tellurem *ειλεισθαι*, *sustineri* dixerit, non inde inferri potest, immotam eam censuisse. Tellus enim etiam circa Solem revoluta, ex Pythagorica doctrina, sustinetur, ne vel in Solem praeceps ruat, neve per orbitae tangentem excurrat ea vi centripeta, ob quam Solem *την τυ Διος φυλακην* (*Arist. de coel. l. 2.*) nuncuparunt Pythagorici. Quod fortasse innuere voluit *εδρυμενην* illud Timoei, quod *συνεχομενην* Proclus interpretatur. Quocumque autem sensu *ειλυμενην* illud intelligi velit, neutiquam profecto diurnum Telluris motum excludit (ne dicam potius quodammodo exprimit) qui ab eo *δημιυργον νυκτος τε, και ημερας* luculenter innuitur. Si enim immota foret Tellus, vel *vicissitudinum diei, noctisque*, vel *solius noctis passiva* tantum *ef-*

amplecterentur, vel quam saltem posteritati traderent dignam existimarunt.

Ex quo factum est, ut cum apud Romanos Graecorum Philosophia pertransiit, eam & Tullius, et Vi-

---

fectrix dici potuisset. *Diei* autem, *noctisque effectrix* activum quid significare videtur. Ipse sane Cicero, qui Platonis verba erat interpretatus, in secundo de Natura Deorum (§. 24.) Balbum inducit Solem (quem circa Tellurem revolvi Balbus putabat) *dici, noctisque effectorem* nuncupantem. „ Isque (*Sol*) oriens, & „ occidens diem, noctemque conficit. „ Aristoteles vero (*de coel. l. 2. c. 13.*) Pythagoricorum doctrinam exponens ait: Πυθαγορειοι . . . φασι, την γην 'εν των αστρων ουσαν κυκλῳ φερομενην περι το μεσον νυκτα, και ημεραν ποιειν, „ Pythagorei . . . ajunt, Ter„ ram unam esse stellarum, ferrique circa Medium, atque hoc „ pacto diem, noctemque conficere. „

Accedit vero, quod Plato in Timoeo non modo Tellurem dixerit δημιουργον νυκτος, και ημερας, sed eam inter *Instrumenta temporis*, οργανα τε χρονου recensuerit cum Luna, & Planetis. 'ως οργανα του χρονου δια της τροπας. προσηγορευε, ut videtur Plutarcho (*Quaest. Plat.* 8.) Quod quidem δημιουργον illud νυκτος τε, και ημερας explicat luculentissime.

Non autem ad vulgi captum sidera circa Tellurem revolvi Platonem dixisse putaverim; sed eo quod Telluris mobilitas adeo sensuum judicio adversetur, ut in communis sermonis usum devenire nunquam possit, cum praesertim Philosophi vulgi sermonem in omnibus retinuerint, sensum emendarint.

(20) V. *Arist. de coel. l. 2.*

Vitruvius (22) & Seneca, & Macrobius, aliique Latinis litteris commendarint. Quibus hac de re quodammodo concinuisse videntur Laertius, Plutarchus, & Stoboeus Graeci inferioris Aevi Scriptores.

VIII. Horret animus, Auditores, ac non sine vehementi quodam moerore ea meminisse refugit luctuosissima tempora, in quibus formidabiles illi septemtrionalium armorum turbines cultiores Europae partes, nostramque praesertim Italiam ingruentibus undique ignorantiae tenebris, gravissimisque aliis calamitatibus furioso quodam, impotentique impetu obruerunt. Miserrimum sane spectaculum, omniumque lacrymis excipiendum Scientiae universae, & Astronomia praesertim Europa extorres in Asiam non veterem

(21) Archimedes in *Arenario* Pythagoricam de Telluris motu doctrinam exposuit.

(22) Vitruvius arbitratus est Mercurium, & Venerem circa Solem revolvi. Ea autem advertenda sunt, quae de Planetarum statiônibus, et retrogradationibus protulit (*l. IX. c. 5.*) „ Ergo potius ea ratio nobis constabit, quod fervor quemadmodum omnes res evocat, & ad se ducit, eadem ratione Solis impetus vehemens radiis Trigoni forma porrectis insequentes stellas ad se ducit, & antecurrententes veluti refroenando, retinendoque non patitur progredi sed ad se cogit regredi & in alterius Trigoni signum esse „.

terem illam quidem confugientes, ibique precariam quamdam apud Arabas vitam expoſtulantes! Permultis quidem obſervationibus ibi ditata fuit Aſtronomia; verum Ptolemaei mancipata auctoritati nihil de Mundi Syſtemate doctrinam promovit, vel potius dicam majori obſcuritate perfudit. Quando enim ex Arabia in Europam cum reliquis fortaſſe Scientiis omnibus Aſtronomia reverſa eſt, tunc de Telluris immobilitate doctrina adeo per univerſum orbem invaluit, ut eam divina veluti auctoritate firmatam in dubium revocare, vel impii, vel dementis eſſe putaretur.

IX. Cum itaque Philoſophi omnes Ptolemaeo adhaererent, acceſſit acerrimo Vir ingenio Copernicus, Terramque ex Univerſi centro protrudens eam cum Planetis omnibus circa Solem commune centrum egit in gyrum, putavitque Solem, ac ſupera omnia ſtare, neque praeter Planetas, & Terram rem ullam moveri, quae cum ſe circa proprium axem celeritate ſumma convertat, & torqueat, eadem effici omnia quaſi ſtante Terra coelum moveretur (23).

Hunc

---

(23) Ante Copernicum Card. Nicolaus Cusa veterem de Telluris motu sententiam protulit [*de Docta Ignorantia l.* 2, *ac* 12.] Cum vero eam nec Cusa, nec alius quivis ante Copernicum de-

Hunc fequutus immortalis Galilaeus noſtras mirum profecto eſt, quantis eam doctrinam aut conſtabiliverit, aut amplificaverit; & perfeciſſet quidem, ni religioſo quodam velamine amicta ignorantia, vel potius invidia dirum Philoſopho, ac non ſine lacrymis memorandum bellum indixiſſet. Pudet adeo homines, ut cum Poeta loquar

Quae imberbes didicere ſenes perdenda fateri!

Magnum autem incrementum doctrina haec a Keplero recepit, & longe majus recipere potuiſſet, ſi quos ſublimiori natura ditavit ingenio neceſſariis eos ad vitae commoda comparanda opibus fortuna ditaret.

Nullus vero tum temporis, qui ſe Catholicum gloriaretur opinionem hanc non dicam propugnare, ſed ne proferre quidem poterat, cui ſacra Romanae Arcis fulmina non eſſent extimeſcenda. Quo fortaſſe timore perterritus aliud Tycho-Braheus effinxit ſyſtema ſi non omnibus explicandis phaenomenis ſatis accommodatum, violatae tamen Religionis invi-

monſtraverit, jure quidem, ac merito divino huic Philoſopho illa tribuitur, a quo ex Naturae ſimplicitate potiſſimum deducta eſt, ac confirmata.

dia nequaquam notandum, ſtatuitque, Solem quinque Planetarum orbitis centrum circa Tellurem cum Luna revolvi. Religioſus ſane Philoſophus; ſed phyſicas veritates in ſanctiſſimae Religionis noſtrae Libris minus ſortaſſe ſapienter exquirens (24).

Alia profecto mente, ſi non feliciori ſucceſſu, ad Naturae contemplationem acceſſit Renatus Carteſius. Tychonici ipſe ſyſtematis celebritati elevandae, Copernicanoque quodammodo confirmando non parum inſerviit. At illum nimis heu ſollicito funere atrox morbus demerſit; gravi quodam moerore perculſi flerunt Matheſis, & amici Philoſophi.

X. Sed tanto confectam dolore Matheſin divinus ille, ac Philoſophorum omnium facile princeps cito recreavit Newtonus. Eo autem exoriente vel Natura ipſa inſolita quadam laetitia perfundi, ſuaque nulli intranda penetralia veluti ſponte recludere viſa eſt; perinde quaſi ſimpliciſſimas eas Leges, quibus adſpectabilem hanc rerum omnium univerſitatem mode-

(24) Tycho-Braheus se Copernici Syſtema eo potiſſimum rejecisse ad Rothmannum scripſit, quod sacris Litteris adversaretur. Sed fortasse & alia fuit caussa nec religiosa quidem, nec phyſica. Copernico primas cedere, ejusque amplecti ſententiam Tychonis superbiam non tulisse veriſimilitudine non ſine magna arbitratur Baillyus (*Hiſt. de l'Aſtr. Mod. T. I.* 10)

deratur, & regit illo sagacissimo interprete proferri optavisset, eo fortasse consilio, ut infinita earum sapientia tenebricosis illis Philosophorum extricata hypothesibus mortalium oculos divino quodam fulgore percelleret.

Cum itaque, majori in dies astronomicis studiis luce affulgente, coelum, ut ita dicam, universum suo Philosophi subjecissent ingenio, ac de Universali Gravitate doctrina physicis rebus obscura adhuc in nocte versantibus clarissimam veluti diem attulisset; tunc quod Copernicus praemonstraverat Systema omnibus absolutum numeris prodiit.

Newtoni siquidem, aliorumque clarissimorum Virorum opera definitum est, circa Solem in centro residentem, agitatumque rotationis motu circa proprium axem Terram, Planetasque ceteros, ipsosque Cometas simili omnes rotationis motu affectos periodos agere suas statis quibusdam legibus, quibus & eorum Satellites, si quos habent, subjiciuntur.

XI. Cum itaque de Mundi Systemate opiniones tam variae sint, tamque inter se dissidentes, alterum fieri profecto potest, ut earum nulla, alterum certe non potest, ut plus una vera sit. Quae igitur coelestibus explicandis phaenomenis accommodata Naturae legibus non adversatur ea, ceteris rejectis, pro vera habenda videtur. Hanc autem Copernicanam esse a Newtono perfectam tum Geometria, tum phy-

ſice abunde ſatis, luculenterque declarant. Et re quidem vera

XII. Poſtea quam Newtonus facili, eaque mirabili ſupputatione demonſtravit, eadem vi retineri Lunam in orbita ſua, qua gravia ſibi relicta verſus Terrae centrum delabuntur (25), vim Planetarum omnium centripetam Gravitatem eſſe Phyſici quique ſaniores conſenſerunt. Inutile hinc arbitramur in re notiſſima confirmanda diutius verſari, ſatiuſque profecto erit demonſtrationem exinde eruere maximi illius theorematis, cui phyſica Aſtronomia potiſſimum innititur, Gravitatem ſcilicet rationem ſequi duplicatam inverſam diſtantiarum a centro.

XIII. Et quidem cum ex indubiis obſervationibus compertum ſit, Lunam ellipſim deſcribere circa Terram in altero ex ejusdem focis locatam, si corporis ellipſim deſcribentis vim centripetam ad focum directam hujusmodi ratione decreſcere demonſtraverimus, theorematis veritas eluceſcet. Id vero facile aſſequi poſſumus, ſi, nonnullis praemiſſis lemmatibus, alia quaedam in anteceſſum maximi momenti theoremata ſtatuantur, quibus ea, quae in poſterum dicturi ſumus innituntur.

XIV. Pri-

(25) *Princ. l. 3. Prop. IV.*

XIV. Primo itaque in quavis Ellipsi A M a m si ex eo majoris Axeos puncto N, (*fig.* 1.), ex quo agitur Normalis N M ad curvam, erigantur perpendiculares N B, N B' ad Radios Vectores F M, fM, quibus Foci cum Tangente M T conjunguntur; ea Vectorum Radiorum pars M B, M B', quae comprehenditur inter curvae perimetrum, et perpendiculares N B, N B' aequalis est dimidio Parametri hoc est B M $=$B'M$= \frac{p}{2}$

XV. Constat ex notis Ellipseos proprietatibus, Vectorem Radium F M (si $2a$ majorem axem, $2b$ minorem, c excentricitatem, x abscissam, y ordinatam exprimat) aequalem esse $\sqrt{(b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + a^2 - b^2 - 2cx + x^2)} = a - \frac{cx}{a}$; & $fM = a + \frac{cx}{a}$; ideoque F M $+ fM = 2a$

XVI. Jam vero, ducta tangente T M, angulus FMT aequalis fit angulo L M T; anguli autem L M T, Q M f aequales sunt; ergo QMf = F M T, ideoque acta Normali M N, angulus N M F = N Mf; unde $2a : a - \frac{cx}{a} :: FN + fN (2c) : FN = c - \frac{c^2 x}{a^2} = c - x + \frac{b^2 x}{a^2}$, quia $c^2 = a^2 - b^2$: indeque F N $+ x - c = PN = \frac{b^2 x}{a^2}$

XVII. Agantur modo ex puncto N normales

NB,

NB, NB' ad Radios Vectores FM, fM. Ob triangulum fMP simile fNB', $fB' = \frac{c^2 + cx}{a}$. Itaque $MB' (= fM - fB') = \left(a + \frac{cx}{a}\right) - \left(\frac{c^2 + cx}{a}\right) = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$

Sed quoniam in omni Ellipsi $\frac{2b^2}{a} = p$, $b^2 = \frac{ap}{2}$; ideoque $MB' = \frac{p}{2}$.

Cum autem sit NBM = NB'M ob latus commune MN, & aequales angulos NMB', NMB, & NBM, NB'M, erit BM = B'M = $\frac{p}{2}$; scilicet dimidio Parametri.

XVIII. Quarta autem Parametri pars in Parabola aequalis est distantiae verticis a foco, minor in Ellipsi, major in Hyperbola. Quod cum per se pateat in Parabola, in Ellipsi tantum, & in Hyperbola demonstrabimus.

In Ellipsi itaque ostendendum est, $a - c > \frac{p}{4}$; in Hyperbola autem $c - a < \frac{p}{4}$, posito scilicet semi-axe sectionis $= a$, Parametro $= p$, et excentricitate $= c$.

Cum igitur in Ellipsi, ex Conicorum doctrina, habeamus $2a^2 - 2c^2 = ap$, erit $p : a - c :: 2a + 2c : a$. Sed $a > c$. Ergo $2a > c + a$, $a > \frac{c + a}{2}$, $a > \frac{2c + 2a}{4}$, ideoque $a - c > \frac{p}{4}$.

Pari

Pari autem ratione ob $2c^2 - 2a^2 = ap$, in Hyperbola erit $p : c - a :: 2c + 2a : a$. Sed $c > a$; ergo $a < \frac{2c+2a}{4}$, & $c - a < \frac{p}{4}$.

XIX. Tribus vero in hisce sectionibus Evolutae Radius aequalis est cubo normalis ad curvam diviso per quartam partem quadrati parametri. Quod ut demonstrari possit, generalis expressio normalis ad curvam, & Radii Osculatoris in quavis curva, quae ordinatas habeat parallelas invenienda est.

XX. Ad quod sit primum (*fig.* 2.) curva A M m, quae ordinatas habeat infinite proximas M P, mp, factisque M P $= y$, A P $= x$, fiet $mr = dy$, M $r = dx$. Agantur autem T M tangens ad punctum M, M N Normalis ad curvam. Ob M r parallelam P T erit subtangens P T $= \frac{y\,dx}{dy}$. Et ob triangulum rectangulum M P T simile M P N, subnormalis P N $= \frac{y\,dy}{dx}$; ideoque Normalis N M $= \frac{y}{dx}\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$.

XXI. Data modo curva A M m, determinandus est ejus Evolutae Radius M C, qui in arcu infinitesimo pro constanti haberi potest. Producantur M P, mp perpendiculares ad Axem A Q in O, o, compleatur Parallelogrammum O Q, sitque M O $= u$, M $m = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Cum itaque C O parallela sit M r, erit M C $= \frac{u\,ds}{dx}$; variantibusque A P, P M, M O, fiet

dif-

differentiando $\frac{(u\,dds + ds\,du)\,dx - u\,ds\,ddx}{dx^2} = 0$, ob MC conſtantem, ſeu $(u\,dds + ds\,du)\,dx = \ldots$ $u\,ds\,ddx$. Et quoniam $du = mr = dy$, $u = \ldots \frac{ds\,dx\,dy}{ds\,ddx - dx\,dds}$, ideoque $MC = \frac{ds^2\,dy}{ds\,ddx - dx\,dds}$; factaque dx conſtanti, $MC = \frac{ds^2\,dy}{-dx\,dds} = \frac{ds^3}{-dx\,ddy}$.

XXII. Qua quidem ex formula facile determinari poteſt Evolutae radius in quavis Conica Sectione. Generalis enim ad Conicas Sectiones aequatio eſt ... $y^2 = px \pm \frac{px^2}{2a}$. Cum itaque normalis n ſit $\frac{y}{dx}\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ (n.° xx). & $ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$, erit $n = \frac{y\,ds}{dx}$. Jam vero radius Evolutae, facta dx conſtanti, eſt MC $= \frac{ds^3}{-dx\,ddy} = \frac{y^3\,ds^3 \,.\, dx^2}{dx^3 \,.\, -y^3\,ddy}$. Subſtituendo itaque fiet $MC = \frac{n^3\,dx^2}{-y^3\,ddy}$. Et quoniam $y^2 = px \pm \frac{px^2}{2a}$, bis differentiando ad quantitatis $\frac{dx^2}{-y^3\,ddy}$ valorem obtinendum, exſurget aequatio $2y\,ddy + 2\,dy^2 = \pm \frac{p\,dx^2}{a}$, $2y^3\,ddy + 2y^2\,dy^2 = \pm \frac{py^2\,dx^2}{a}$, & $y^3\,ddy = \pm \ldots \frac{py^2\,dx^2}{2a} - y^2\,dy^2$, ac ſubſtituendo $y^3\,ddy = \ldots\ldots$ $dx^2\left(\pm \frac{p^2x}{2a} + \frac{p^2x^2}{4a^2} - \frac{p^2}{4} \mp \frac{p^2x}{a\,2} - \frac{p^2x^2}{4a^2}\right) = \frac{-p^2\,dx^2}{4}$; id-

ideoque Radius Osculator cujusvis Sectionis Conicae $MC = \frac{n^3}{4p^2}$.

XXIII. Quibus ita praemissis, nonnulla statuenda sunt de viribus centralibus generalia theoremata.

XXIV. Quantitas vis, qua uniformis motus finito tempore $= t$ producitur aequalis est $\frac{M \times C}{t}$, si M massa dicatur, C celeritas; hoc est $M : U :: t : C$, facta vi $= U$. Si igitur cum U, M quantitates finitae sint, tempus, ideoque & celeritas infinitesima habeatur, fiet $t = dt$, $C = dc$, & $U \times t = M \times C$ vertetur in $U dt = M dc$, hoc est $\frac{U}{M} = \frac{dc}{dt}$; ac proinde, si fiat $\frac{U}{M} = A$ vi acceleratrici, exsurget aequatio $A dt = dc$ in motu, qui unico infinitesimo tempusculo uniformis sit; hoc est in motu variabili.

XXV. Moveatur itaque corpus M in trajectoria SML (*fig.* 3.), ejusque acceleratrix vis A in duas resolvi intelligatur, quarum altera $A' = X$ corpus impellat per MI parallelam $SG = x$, altera vero $A'' = Y$ per MH parallelam ordinatae $GM = y$. Notum est, corpus A' impulsum tempore dt descripturum esse $Ma = dx$ celeritate $c' = \frac{dx}{dt}$, A'' vero impulsum ab

$= d\,y$ celeritate c" $= \frac{dy}{dt}$; ac demum impulſum $A' + A''$ deſcribere $M\,b = d\,s$ celeritate $c = \frac{ds}{dt}$.

Sed $A'\,d\,t = d\,c'$, A" $d\,t = d\,c''$ (n. xxiv). Ergo $A'\,d\,t$, ſeu $X\,d\,t = d\,(\frac{dx}{dt})$, & $A''\,dt$, ſeu $Y\,d\,t = d\,(\frac{dy}{dt})$.

XXVI. His poſitis, ſit C centrum virium, S punctum, ex quo corpus celeritate quadam projectionis $= P$ impulſum ſupponitur, ſitque CS $= a$, indeque CG $= a - x$, MC radius vector $= z$, MR vis centripeta U in puncto M. Si vi MR in MI, MO reſoluta, compleatur parallelogrammum MR, fiet $z : a - x :: U :$ RO $= \frac{U(a-x)}{z}$. Sed RO $=$ MI $= X$; ergo $X = \frac{U(a-x)}{z}$.

Pari ratione MO $= - Y = \frac{U\,y}{z}$, eo quod vis Y, quae ſecundum MH fuerat assumpta, in contrariam modo partem dirigatur.

Quas ergo in ſuperiori numero invenimus aequationes reducuntur ad $\frac{U\,dt(a-x)}{z} = d\,(\frac{dx}{dt})$, atque $\frac{-U\,y\,dt}{z} = d\,(\frac{dy}{dt})$. Quarum aequationum ſi prima per y, altera vero per $a - x$ multiplicetur, inde vero addantur, fiet $o = y \times d\,(\frac{dx}{dt}) + (a - x) \times d\,(\frac{dy}{dt})$.

Haec

Haec autem aequatio integrata evadit $\frac{y\,dx}{dt} + \ldots$ $(a-x)\frac{dy}{dt} = Const. = B$. Cujus duobus membris addita quantitate $\frac{y\,dx}{dt}$, iterum integrando habebitur $\int y\,d\,x +$ $\left(\frac{a-x}{2}\right)y = \frac{Bt}{2}$: Ubi constans omittitur, quia facta $x = a$, & $t = o$, $\int y\,d\,x$ evanescere debet.

Verum spatium M a G $g = y\,dx$ assumi potest pro elemento segmenti S G M, ob triangulum M $ab = \ldots$ $\frac{dx\,dy}{2}$ differentiale secundi ordinis. Ergo $\int y\,d\,x = \ldots$ MSG. Quantitas autem $\left(\frac{a-x}{2}\right)y = tri.$ MGC. Integer ergo sector CSM $= \frac{Bt}{2}$; eademque ratione quivis alius sector CST $= \frac{BT}{2}$; ideoque CST $-$ CSM ($=$ CMT) : CSM $:: \frac{BT-Bt}{2}\left[= \frac{B}{2}(T-t) = \frac{Bt'}{2}\right] : \frac{Bt}{2}$; hoc est CSM : CMT $:: t : t'$; scilicet *In quavis trajectoria sectores, qui radiis vectoribus, & curvae perimetro comprehenduntur proportionales sunt temporibus, quibus describuntur.*

XXVII. Quod si radio C M $= z$ describatur arcus infinitesimus M I $= dW$, fiet area triangularis M C b = M C I + M b I. Sed M b I evanescit ob punctum b infinite proximum puncto M; ergo d (S C M) =

M C I $= \frac{z\,dW}{2}$. Sed, facto angulo S C M $= v$, & ideo M C $b = d\,v$, ex Trigonometria obtinemus M I $= d\,W = z\,d\,v$. Ergo d (S C M) $= \frac{z^2 d v}{2}$, & integrando S C M $= \frac{1}{2} \int z^2\,d\,v$, Sed S C M $= \frac{B t}{2}$(n. xxvi). Ergo $\frac{1}{2} \int z^2\,d\,v = \frac{B t}{2}$, ac differentiando $\frac{1}{2} z^2\,d\,v = \frac{B\,d\,t}{2}$. Agatur modo C N $= q$ normalis ad tangentem M N. Erit M C $b = \frac{q\,d\,s}{2}$, ut constat ex Geometria. Sed M C $b =$ M C I $= \frac{z^2 d v}{2} = \frac{B\,d\,t}{2}$. Ergo $\frac{q\,d\,s}{2} = \frac{B\,d\,t}{2}$; & in alio puncto $q'\,d\,s'$ $B\,d\,t'$; ac proinde $\frac{d\,s}{d\,t} : \frac{d\,s'}{d\,t'} :: \frac{1}{q} : \frac{1}{q'}$; hoc est *In quavis trajectoria Celeritates effectivae sunt reciproce, ut normales eae, quae a centro virium ad tangentem ducuntur*.

XXVIII. Ex quo fit, ut in circularibus trajectoriis, quae normales hasce in quovis perimetri puncto aequales habent, eadem semper celeritas observetur.

XXIX. Ex iis, quae hactenus statuimus facilis demonstratio eruitur celeberrimi illius theorematis de viribus centralibus, quod fortasse a Newtono excogitatum primus omnium Moivrius protulit, Keillius, Johannes Bernoullius, Christianus Wolfius, Eulerus, aliique perplures illustrarunt, scilicet *In quavis trajectoria vim centripetam* U *aequari radio vectori* z *di-*

vi-

viso per evolutae radium r *ductum in cubum normalis ejus* q *quae a centro virium ad tangentem ducitur*, idest $U = \frac{z}{rq^3}$.

Et quidem ex iis, quae numero XXI. demonstrata sunt, $r = \frac{ds^2 dy}{ds\,ddx - dx\,dds}$. Cum itaque sit $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $dds = \frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{ds}$, evadet $r = \ldots \frac{ds^3}{dy\,ddx - dx\,ddy}$. Ex numero autem XXVI. eruitur ... $dy\,ddx - dx\,ddy = \frac{U dt^2}{z}\,[(a-x)\,dy + y\,dx]$. Ergo $r = \frac{z\,ds^3}{U dt^2\,[(a-x)\,dy + y\,dx]}$. Sed $(a-x)\,dy + y\,dx = B\,dt$ (n. XXVI). Ergo $r = \frac{z\,ds^3}{UB\,dt^3} = \frac{z}{BUq^3}$ ob $\frac{1}{q^3} = \frac{ds^3}{dt^3}$ (n.° XXVII). Hinc autem $U = \frac{z}{Brq^3} = \frac{z}{rq^3}$, detracta constanti B.

XXX. Verum si virium centrum in ellipseos foco situm sit, evolutae radius proportionalis fit $\frac{z^3}{q^3}$.

In trajectoria elliptica S M L, quae focum habeat in C, normalem ad curvam PM $= n$, CM radium vectorem $= z$, CN $= q$ perpendicularem ad tangentem, agatur PQ perpendicularis ad radium vectorem, sitque MQ $= e$, & evolutae radius in puncto M fiat $= r$. Ex iis, quae supra dicta sunt (n. XXII.) $r = \frac{n^3}{\frac{1}{2}p^2}$ . .

Er-

Ergo $r : r' :: \frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2} : \frac{n'^3}{\frac{1}{4}p^2}$. Sed $e = \frac{p}{2}$ (n. XIV.) Ergo $r : r' :: \frac{n^3}{e^2} : \frac{n'^3}{e'^2} :: \frac{n^3 \frac{1}{2} p}{e^3} : \frac{n'^3 \frac{1}{2} p}{e'^3}$. Jam vero ob triangulum MCN ſimile MQP $q = \frac{ze}{n}$, $q' = \frac{z'e'}{n'}$, $q^3 = \frac{z^3 e^3}{n^3}$, $q'^3 = \frac{z'^3 e'^3}{n'^3}$, & $\frac{n^3}{e^3} = \frac{z^3}{q^3}$, $\frac{n'^3}{e'^3} = \frac{z'^3}{q'^3}$. Subſtituendo itaque $r : r' :: \frac{z^3 \frac{1}{2} p}{q^3} : \frac{z'^3 \frac{1}{2} p}{q'^3} :: \frac{z^3}{q^3} : \frac{z'^3}{q'^3}$.

XXXI. Si ergo in aequatione ſuperiori $U = \frac{z}{q^3 r}$ (n. XXIX.) quem modo invenimus r valor ſubſtituatur, fiet $U = \frac{z q^3}{q^3 z^3} = \frac{1}{z^2}$. Ergo $U : U' :: \frac{1}{z^2} : \frac{1}{z'^2}$.

Ergo vis centripeta corporis ellipſim deſcribentis, ſi ad alterum tendat ex ejuſdem focis, rationem ſequitur duplicatam inverſam diſtantiarum a foco, ſeu a centro virium.

Ergo Gravitas (n. XIII), proindeque vis Planetarum omnium centripeta (n. XII) rationem ſequitur duplicatam inverſam diſtantiarum a centro virium (26).

XXXII.

(26) Praeclariſſimum hoc theorema Pythagoram non latuit. Hoc enim, ut Gregorius ait in laudata Praefatione, ille, & illius Affeclae adumbrarunt per harmoniam Sphoerarum. Finxere nimirum Apollinem lyram septem chordarum pulsare, quo symbolo, ut ex Plinio (*l.* 2. *c.* 22.), Macrobio (*l.* 1. *c.* 19),

XXXII. Quod probe constitutum facilem admodum, ac planam ad Copernicani-Systematis veritatem demonstrandam viam sternit. Hoc enim freti principio supponemus, Terram, Planetasque omnes Primarios circa Solem moveri vi quadam projectionis impulsos, cujus directio per eorum gravitatis centrum non transeat; quasque illis in hac hypothesi servandas leges, quaeque phaenomena ostendenda Mechanica, & Geometria demonstrant, perscrutabimur. Quae omnia si cum iis, quae ex indubiis observationibus comperta sunt apprime conveniant; universalesque insuper Naturae leges uni Copernicano Systemati non adversentur, nullum jam de ejus veritate dubium poterit superesse.

XXXIII. Primo itaque evidens est, Terram, Planetasque omnes Primarios circa Solem commune centrum trajectorias quasdam descripturos. Quivis enim Planeta (*fig.* 4.) ex A impulsus cum in B venerit dato tempo-

& Censorino (*c.* 11.) abunde constat, intellexere Solem cum septem Planetis; illum nempe Hebdomagetam, & Naturae moderatorem constituerunt, censueruntque vi sua attractiva agere in Planetas in ratione illa harmonica distantiarum. Vires enim, quibus aequales tensiones agunt in chordas diversarum longitudinum, ceteris paribus, sunt reciproce, ut quadrata longitudinum chordarum.

pore, aequali tempore, ſi nihil impediret, recta pergeret ad *c* deſcribens lineam B*c* = A B. Sed vis centripeta vehementi quadam attractione efficit, ut de recta B*c* declinet, & ad Solem S accedat in recta BC; eaque ratione ex puncto C in D, ex D in E Planeta protrahetur, & polygonum A B C D E circa Solem deſcribet. Cujus latera A B, BC, C D &c. ſi infinitesima evadant, polygonum in curvam convertetur. Sed cum centripeta Planetarum vis indeſinenter agat, tempora, quibus ea latera deſcribuntur, ideoque & latera ipſa infinitesima ſunt. Ergo Planetae trajectorias quaſdam circa Solem deſcribere debent.

XXXIV. Cujus naturae Planetarum trajectoriae futurae ſint ex eorum vi centripeta demonſtraturi difficile quidem problema enucleandum aggredimur. Illud divino eo, quo pollebat ingenio Newtonus primus reſolvit. Cum enim demonſtraviſſet (27) vim centripetam corporis quamcumque conicam ſectionem deſcribentis, si ad alterum tendat ex ejuſdem focis, duplicatam inverſam eſſe diſtantiarum a foco; exinde viciſſim collegit, corpus, quod data velocitate impulſum circa aliquod immobile punctum revolvatur vi di-

(27) *Lib. I. Prin. prop.* 11, 12, 13.

distantiarum quadrato reciproce proportionali conicam sectionem semper descripturum, viriumque centrum futurum semper alterum ex umbilicis.

Dato siquidem umbilico, puncto contactus, ac positione tangentis describi potest sectio conica, quae curvitatem datam convertat ad punctum illud. Datur autem curvitas ex data vi centripeta, ac velocitate corporis; nec orbes duo se mutuo tangentes eadem vi centripeta, eademque velocitate describi possunt. Quae licet peculiari demonstratione indigere ad Hermannum scripserit Johannes Bernoullius, per se tamen manifesta sunt. Data namque positione tangentis, ac vi centripeta, data jam, ac determinata est omnis a tangente ipsa deflexio.

Alia quidem, sed non multum a newtoniana diversa methodo duas problematis hujusce solutiones, quae ad eamdem aequationem reducuntur egregius hic Geometra exhibuit in Actis Academiae Parisiensis ad annum 1710.

Quarum cum fama percrebuisset, idem problema enucleandum Hermannus aggressus est nec generaliter satis, nec satis exacte. Nam, praeterquam quod uni tantum virium legi Hermanni solutio accommodatur, ex ea, qua utitur differentialium reductione, duplicique integratione, illum quae sibi eruenda erat aequatio compertam antea habuisse vel nimium luculenter elucet. Et cum insuper alterutri differentio-differen-

E tia-

tialis aequationis ſuae parti poſt primam integrationem conſtantem addere neglexiſſet, dubium reliquit, an ejus ſolutio conicis tantummodo ſectionibus conveniret.

In eosdem fere Bernoullii numeros recidunt, quae de inverſo virium centralium problemate diffuſius, nitidiuſque demonſtravit in XIII. Mechanicae ſuae capite Chriſtianus Wolfius.

Centralium virium theoriam in primi Mechanicae ſuae voluminis capite quinto egregie, ut cetera, pertractavit divinus Geometra Leonardus Eulerus; quaeque trajectoriae deſcribendae ſint corpori (quod veluti punctum conſideravit) verſus immobile centrum agitato viribus in eadem ratione decreſcentibus, in qua creſcunt diſtantiarum quadrata ex celeritatis, diſtantiaeque functionibus elegantiſſime deduxit; licet quaedam minus vera de motu hujuſce corporis per ellipſim in lineam rectam transformatam illuc loci protulerit (28), eo quod coeco formularum ductui plus

---

(28) Cum plurima ex iis, quae ad motum corporis in ellipſi pertinent Eulerus demonſtrasset in corollariis prop. 80. supposuit celeritatem initialem in vertice ellipseos evanescere, ideoque ellipſim in lineam rectam abire; censuitque corpus, cum ad alterum ex lineae extremis pervenerit, sursum regressurum licet cum infinita velocitate deorsum appellat, nec ullum in-

plus aequo fortasse tribuens calculis potius, quam suo judicio fidendum esse putaverit.

Cum vero paullo post celeberrimus Boskovichius nonnulla ad infinitorum indolem, atque usum pertinen-

---

veniat objicere. Idque sic omnino demonstrari posse arbitratur. Si corpus ex A projiciatur velocitate ita exigua, ut describat ellipsim A M *a m* (*fig.* 1.) gyrabit perpetuo circa punctum *f* descendendo, & adscendendo per vices ex A ad *a*, & ex *a* ad A. Imminuta celeritate projectionis, donec evanescat, abibit demum perimeter ellipseos in rectam A*f*, & punctum *a* in *f*, quare corpus ad *f* delatum retro cursum flectet ad A, nec ultra *f* progredi poterit.

Idem repetit § 762, ubi generaliua affirmat, si vires centripetae cubo distantiae reciproce proportionales sint, delatum corpus ad centrum cum infinita velocitate deinde ex eo egredi non debere, sed quasi *subito annihilari*, valore nimirum formulae, quae distantiam exprimit post appulsum ad centrum abeunte in imaginarium; si autem vires sint in ratione minori, quam triplicata, sed non minori, quam simplici, corpus pariter delatum cum infinita celeritate debere cursum retro flectere; & solum ubi vires sint in ratione minus quam simplici, debere appellere cum velocitate finita, & ultra progredi. Sensit quidem eximius Geometra, quam veritati minus consentanea prima illa duo apparerent ipsa prima fronte, ut satis luculenter expressit § 272; censuit tamen ita evidenter deduci ex formulis algebraicis, & ex hac transformatione curvarum in rectas, ut *calculis potius, quam nostro judicio fidendum sit*.

nentia Geometris nec injucunda, nec inutilia proferre meditaretur, ea non nisi tam nobili, & aliunde jam satis cognito, atque enucleato problemati aptanda esse duxit in Commentariis Bononiensis Instituti; ubi cum synthetica *Aequipollentium* methodo statuisset, trajectoriam conicam corpori ea vi centripeta circa immobile centrum acto describendam esse, celeritatis rationem in quavis conica sectione perscrutatus est, indeque occasione arrepta vitium fallacis argumentationis, qua Eulerus sententiam omnino incredibilem confirmare maxime nititur aperuit, atque enodavit (29).

Mul-

---

(29) Infinite parva, & infinita, quae in se determinata sint respuit Boskovichius in Diss. *De Nat. & usu infinitorum &c.* Cumque celeritatis mensura requirat spatium aliquod aliquo tempore percursum, nullam agnoscit celeritatem absolute infinitam, aut infinitesimam: illudque pro certo statuit, nullam omnino debere esse in natura aut vim, aut celeritatem infinitam, ne in Eulerianis quidem hypothesibus, si non puncta pure imaginaria agant in alia puncta, sed corpora in corpora; quo in casu ob corporum impenetrabilitatem ad centrum deveniri non potest. Sed si considerari velint punctorum vires in puncta, duo demonstravit (*in Com. Bon. Inst. T.* 2.) 1. Ex transformatione ellipseos, vel alterius sectionis conicae in rectam lineam non deduci reflexionem motus a centro virium in eamdem plagam; 2. Sed motum continuari debere ultra centrum celeritate per eosdem gradus imminuta, per quos creverat.

Multum quidem cum newtoniana methodo ea convenit, quam in hujusce problematis solutione adhibuit Paulus Frisius (30).

Hoc idem problema & ipse praestantissimus Geometra De la Place non multis ab hinc annis resolvit. Cum enim ellipticorum, & parabolicorum motuum symptomata eruenda suscepisset ex una consideratione aequationum differentialium secundi gradus, quibus singulo quoque tempore corporum coelestium circa Solem motus determinatur (31), Planetarum orbitas ex hac eadem consideratione deduxit perelleganti quadam methodo, quae a superius laudata bernoulliana non multum abludit, & ab ea praesertim, qua idem problema enucleaturus usus est in sua Mechanica D. Marie.

Sed longum foret eas omnes problematis hujus solutiones dinumerare, quae a Newtono ad nostra usque tempora prodiere. Has autem inter eleganti quadam simplicitate, ac nitore ea potissimum commendanda est, quam duo praestantissimi Viri Stanislaus Canovajus, & Cajetanus Del Ricco in aureo quodam, licet

(30) *Cosmo. Phy. l. 1. c. 2.*

(31) V. *Theorie du mouvement &c. des Planetes par Mon. De la Place. 1784.*

cet elementari opere superiori anno typis edito (32) ex ipsis Wolfii principiis exhibuerunt.

Ea autem non commendanda modo, sed et diffusius perpendenda est, quam celeberrimus aevi nostri Geometra la Grangius publici juris fecit in ejus, quam nuperrime edidit Analyticae Mechanicae altera parte.

Quemvis ille motum veluti compositum ex tribus aliis motibus secundum tres directiones inter se perpendiculares considerat, & corporum motum ad fixas in spatio directiones referens, corporum eorumdem locum in spatio determinat trium coordinatarum rectangularum ope, quae easdem habeant directiones. Ex quo fit, ut harum coordinatarum differentiales per constantem differentialem temporis divisae exprimant corporis celeritates secundum earumdem coordinatarum directiones, ideoque earum secundae differentiales per quadratum differentialis temporis divisae acceleratrices vires, quae secundum has easdem coordinatas agere debent; ita ut expressiones hujusmodi viribus, ex problematis natura, exaequando tres obtineantur aequationes, quibus universae motus circumstantiae determinari possunt. Cum

(32) *El. di Fis. Matt.* Quaedam Nos ex hoc Opere, non secus ac ex aliis instituto nostro accommodavimus, quin tamen unde derivatae fuerint indicaremus. Id autem eo tantummodo factum fuisse profitemur, ut inutilium citationum incommodum tolleretur.

Cum itaque Galilaejanum illud *Virtualium Celeritatum* principium cum hujusmodi motus consideratione pereleganter conciliasset, generalem obtinere potuit formulam, quae omnium Dynamicae problematum aequationes, ac solutionem comprehenderet.

Qua quidem ex formula cum plurima generalia principia, tum illud praesertim deduxit, quod vel ab anno 1746. D. d' Arcy in Comment. Ac. Par. demonstraverat; summam scilicet productorum massae singulorum corporum ductae in areas ab eorum vectoribus radiis descriptas circa immobile centrum, & in quodvis planum projectas tempori proportionalem esse.

Ex quo fit, ut si areae ad tria plana inter se perpendicularia referantur, tres obtineri possint aequationes differentiales primi ordinis inter tempus, & coordinatas curvarum, quae a corporibus describuntur.

Ex his itaque principiis, hujusmodique methodo motum corporis erga unum, vel plura centra impulsi, massa pro unitate assumpta, generatim considerans (33), et coordinatarum x, y, z originem in centro supponens, ad duas pervenit aequationes, quarum altera temporis differentialem exhibet, altera vero differentialem anguli, quem projectio radii vectoris in coordinatarum

rum

(33) *Mech. Anal. Sec. Part. Sect. V.* §. 2.

rum planum constituit cum axe linearum x. Quae duae aequationes si integrentur, prima corporis situm in quovis tempore, altera trajectoriae figuram ostendet.

Ut autem ex his aequationibus, quae esse debeat Planetarum trajectoria deduceret, loco generalis functionis, qua vis exprimitur, substituit functionem, quae vim in duplicata distantiarum ratione decrescentem exprimeret. Qua peracta substitutione, erutoque maximo, ac minimo vectoris radii valore, orbitae naturam determinaturus eam retulit ad duas coordinatas x, y ex centro vectorum radiorum assumptas, quarum altera x foret in maximi vectoris radii directione, indeque aequationem secundi gradus obtinuit conicam sectionem exhibentem; & cum deprehendisset parametri dimidium p evadere y, cum $x = o$, collegit inde, coordinatarum principium, seu virium centrum esse alterum ex umbilicis. Statuit itaque, Planetas conicam sectionem describere circa Solem in foco residentem, cujus sectionis generalis aequatio sit $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos.(\phi - \gamma)}$, si a media distantia sit, e excentricitas, r radius vector, qui cum aphelii linea constituat angulum $\phi - \gamma$.

XXXV. Tanta Nos solutionum in copia aliam quamdam proferre audemus ex iis, quae supra de centralibus viribus inventae sunt aequationibus derivatam.

Re-

Resumantur generales aequationes numeri XXVI. $\frac{U\,dt\,(a-x)}{z} = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, & $\frac{-U y\,dt}{z} = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Si facta dt constanti, earum prima per $\frac{dx}{dt}$, altera per $\frac{dy}{dt}$ multiplicetur, addanturque, obtinebitur $\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{dt^2} = \frac{(a-x)\,dx - y\,dy}{z^3}$, cum sit $U = \frac{1}{z^2}$ (n. XXXI.). Sed cum sit $y\,dy - (a-x)\,dx = \frac{d[y^2 + (a-x)^2]}{2} = d\left(\frac{z^2}{2}\right)$. . . (n. XXVI.), erit $(a-x)\,dx - y\,dy = -z\,dz$. Ergo substituendo $\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{dt^2} = -\frac{dz}{z^2}$, ac integrando .. $\frac{dx^2 + dy^2}{2\,dt^2} = \frac{1}{z} + Const.\ (= A)$. Sed $a - x = z \cos. v$, $y = z \sin. v$, si z, & v idem exprimant, quod supra (n. n. XXVI, XXVII.). Substituendo itaque fiet $\frac{dz^2 + z^2 dv^2}{2\,dt^2} = A + \frac{1}{z}$.

Jam vero $dt = \frac{z^2\,dv}{B}$ (n. XXVII.). Substituendo igitur $B^2 dz^2 = (2Az^4 + 2z^3 - B^2 z^2)\,dv^2$; ideoque $dv = \frac{B\,dz}{z\sqrt{(2Az^2 + 2z - B^2)}}$. Fiat $z = \frac{1}{r}$, eritque $dv = \frac{-B\,dr}{\sqrt{(2A + 2r - B^2 r^2)}}$. Supponatur rursus $r = \frac{1}{B^2} + s$, eritque $dv = \frac{-ds}{\sqrt{(h^2 - s^2)}}$, si fiat $2A + \frac{1}{B^2} = B^2 h^2$. Inte-

grando erit $v + C = ang.\ cos.\ \frac{s}{h}$, ideoque $s = b\ cos.\ (v + C)$; hoc eſt $\frac{1}{z} - \frac{1}{B^2} = b\ cos.\ (v + C)$, ſcilicet, ſubſtituendo valorem z in x, & y, $\frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} - \frac{1}{B^2} = \ldots$ $b\ cos.\ (v + C) = b\ cos.\ C\ cos.\ v. - b\ sin.\ C\ sin\ v. = \ldots\ \frac{m(a - x)}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} - \frac{ny}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, ſi fiat $b\ cos.\ C = m, b\ sin.\ C = n$. Unde eruitur aequatio, $(1 - ma)^2 + 2mx \ldots - 2m^2 ax + (m^2 - \frac{1}{B^4})x^2 + 2ny - 2mnay + \ldots 2mnxy + (n^2 - \frac{1}{B^4})y^2 = 0$. Quae quidem aequatio conicam ſectionem exprimit, parabolam ſi $m^2 + n^2 = \frac{1}{B^4}$, ſcilicet ſi $b = \frac{1}{B^2}$, ellipſim ſi $b < \frac{1}{B^2}$, hyperbolam demum, ſi $b > \frac{1}{B^2}$.

Patet ergo, unumquemque Planetam per inane ſemel projectum, & vi diſtantiarum quadrato reciproce proportionali ſollicitatum conicam ſectionem deſcripturum eſſe circa Solem in foco ſectionis conſtitutum.

XXXVI. Quae vero ex conicis trajectoriis Planetis deſcribenda ſit determinaturis, corporum per easdem celeritatis ratio aliquantiſper perpendenda eſt.

Haberi itaque vidimus (n. XXVII.) in quavis trajectoria $c : c' :: \frac{1}{q} : \frac{1}{q'} :: \frac{\sqrt{p}}{q} : \frac{\sqrt{p'}}{q'}$. Hinc eſt, quod celerita-

ritates in vertice duarum conicarum ſectionum, quae communem tum focum, tum verticem habeant, ſint inter ſe :: $\sqrt{p} : \sqrt{p'}$, eo quod, dicta φ diſtantia foci a vertice, in utraque ſit $q = q' = \varphi$.

Si ergo intervallo φ deſcribatur circulus, celeritas in vertice ſectionis erit ad celeritatem hoc in circulo, ut $\sqrt{p} : \sqrt{2\varphi}$.

Sed in parabola $p = 4\varphi$, in Ellipſi $p < 4\varphi$, in hyperbola $p > 4\varphi$ (n. XVIII). Ergo erit celeritas in parabola ad celeritatem in circulo intervallo $= \varphi$ deſcripto, ut $\sqrt{4\varphi} : \sqrt{2\varphi} :: \sqrt{2} : \sqrt{1}$, in minori ratione in ellipſi, in majori autem in hyperbola.

XXXVII. Jam vero ex indubiis obſervationibus compertum eſt, Planetas non eadem ſemper celeritate moveri. Exinde autem plane colligitur, Planetarum trajectorias circulares non eſſe (n. XXVIII). Cum itaque in circularibus trajectoriis Planetae non revolvantur non aeque ſemper a Sole diſtabunt, & ad illum proximius accedent, cum in vertice ejus, quam deſcribunt conicae ſectionis verſabuntur. Si igitur perihelia Planetarum celeritas cum celeritate, qua moverentur in circulo periheliae diſtantiae intervallo deſcripto comparetur, qua in trajectoria moveantur facile intelligi poterit. Sit pro omnibus Saturnus. Perihelia Saturni diſtantia = 900727 circiter, ſi media telluris a Sole diſtantia ſupponatur = 100000. Ejus perihelia celeritas = $\sqrt{(1802938)}$ circiter; in circu-

F 2 lo

lo autem, qui periheliae diſtantiae intervallo deſcribi intelligatur, eſſet = $\sqrt{(1801454)}$. Sed $\sqrt{(1802938)}$: $\sqrt{(1801454)} < \sqrt{2} : \sqrt{1}$. Ergo Saturnus deſcribere debet ellipſim circa Solem in altero ex ejuſdem focis locatum (n. xxxvi.). Quod de Saturno demonſtravimus eadem methodo de omnibus demonſtrari poteſt. Ergo in Copernicana hypotheſi Planetae ellipſes circa Solem communem focum deſcribere debent.

XXXVIII. Cum itaque Planetae in ellipſibus revolvantur, facile determinari poteſt, quae nam ſit in quovis orbitae loco R (*fig. 5.*) abſoluta eorum vis centripeta. Si enim in ellipſi A B ab ex ipſi R infinite proximo puncto L demittatur in radium vectorem F R = z perpendicularis L K = k; dico, vim centripetam abſolutam corporis in R aequalem $Ru = u = \frac{k^2}{p}$; ſcilicet hujuſce perpendicularis quadrato diviſo per parametrum.

Agatur evolutae radius R$u = r$, cujus pars Rq $= m$, ductiſque axibus majori = $2a$, minori = $2b$, ſint conjugatae diametri R$g = 2g$, H$b = 2b$, perpendicularis F T, quae ex foco ad tangentem ducitur = q; abſciſſa Rx = x, & ordinata infiniteſima Lu = Lx = Lz = y, Rz (ſinus verſus arcus LR) = $\frac{y^2}{2r}$; R D autem cum ſit illa vectoris radii pars, quae a diametro conjugata intercipitur erit = a, ut ex conicis facile eſt demonſtrare.

Ob

Ob triangulum u R z ſimile L u K, $u = \frac{y^3}{2kr}$. Sed ob triangulum R x z ſimile R C q, $mx = \frac{gy^2}{2r}$. Ergo $r = \frac{gy^2}{2mx}$: at ellipſeos aequatio praebet $y^2 : 2gx :: h^2 : g^2$. Ergo $y^2 = \frac{2h^2x}{g}$. Ergo $r = \frac{h^2}{m}$. Cum vero in ellipſi rectangulum ſub axibus aequale ſit parallelogrammo diametrorum, $hm = ab$, $h^2 = \frac{a^2b^2}{m^2}$; ideoque $r = \frac{a^2b^2}{m^3}$. Sed propter triangulum F R T ſimile R D q $m = \frac{aq}{z}$. Ergo $r = \frac{b^2z^3}{aq^3}$. Sed triangulum R F T ſimile L u K exhibet $\frac{q}{z} = \frac{y}{k}$. Ergo $r = \frac{b^2y^3}{ak^3}$ Ergo $u = \frac{ak^2}{2b^2} = \frac{k^2}{p}$, eo quod ſit $p = \frac{2b^2}{a}$.

XXXIX. His poſitis, ſtatuendum occurrit, quibus potiſſimum legibus ellipticus Planetarum motus regi debeat.

Primo itaque evidens eſt, ex iis, quae ſupra demonſtravimus (n. XXVI.) ea celeritate Planetas circa Solem moveri debere, qua areas deſcribant deſcriptionis temporibus proportionales.

XL. Hinc autem manifeſto conſequitur, Planetarum periodica tempora futura eſſe in compoſita ratione ex directa ſuperficiei totius orbitae, & inverſa

areae

areae cujusvis sectoris dato tempore descripti; ita ut, si tempus periodicum fiat $= t$, area sectoris $= n$, sit $t = \frac{2a \times 2b}{n}$, eo quod rectangulum ex axibus proportionale sit ellipseos areae.

XLI. Jam vero si plura corpora ellipses describant, quae communem focum habeant, sectorum eodem tempore descriptorum areae erunt, ut parametrorum radices secundae. Cum enim $Ru = u$ sit $= \frac{k^2}{p}$ (n. XXXVIII.) erit $up = k^2$. Et quoniam $u = \frac{1}{z^2}$ . . (n. XXXI.), $\frac{p}{z^2} = k^2$, seu $p = k^2 z^2$; & idcirco $zk = \sqrt{p}$; at zk (= FR × LK) proportionalis est FLR $= n$. Ergo $n. = \sqrt{p}$. Idem de alio sectore n' demonstrari potest. Ergo $n : n' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$.

XLII. Cum itaque $n = \sqrt{p}$, ac $t = \frac{2a \times 2b}{n}$ (n. XL), erit $t\sqrt{p} = 2a \times 2b$.

XLIII. Quibus ita praeconstitutis, facile quidem demonstrari potest, tempora periodica Planetarum, qui ellipses circa Solem communem focum describunt, futura esse inter se in sesquiplicata ratione majorum axium. Dicatur in omni Planetarum ellipsi $2a = A$. Constat ex conicis, $Ap = 4b^2$, $A^3 p = 4A^2 b^2$. Sed $4A^2 b^2 = t^2 p$ (n. XLII.) Ergo $A^3 p = t^2 p$; $A^3 = t^2$; Et in alia quavis ellipsi $A'^3 = t'^2$. Ergo $t^2 : t'^2 :: A^3 : A'^3$.

XLIV.

XLIV. Hinc eſt, quod ſi deſcribatur circulus, qui diametrum habeat aequalem ellipſeos majori axi, tempus periodicum in circulo aequale erit tempori periodico in ellipſi.

XLV. Jam vero majores ellipſium axes proportionales ſunt mediis radiis vectoribus, vel diſtantiis, ut ex focorum natura manifeſtum eſt (n. xv). Ergo tempora Planetarum periodica eſſe debent inter ſe in ſeſquiplicata ratione mediarum diſtantiarum a Sole.

XLVI. Ea autem celeritas, qua revoluti Planetae expoſitas ſuperius ſervant leges, quaenam eſt, quibuſve & ipſa obtemperat legibus? Id facile quidem determinari poteſt, ſi dicta c celeritate reſumatur aequatio n. xxxv. ex qua Planetarum orbitas determinavimus $\frac{dxddx+dyddy}{dt^2}=\frac{(a-x)\,dx-ydy}{z^3}$, ac loco $\frac{1}{z^2}$ ſubſtituatur U. Cum enim ſit $\frac{dxddx+dyddy}{dt^2}=\frac{d(dx^2+dy^2)}{2dt^2}$ $=d\left(\frac{ds^2}{2dt^2}\right)=c\,dc$, et $(a-x)\,dx-ydy=-z\,dz$ (n. xxxv,), fiet $c\,dc=-Udz$. Qua in aequatione cum variabilis ſit quantitas U integrari nequit Udz niſi U detur per z.

XLVII. Id vero facile obtineri poteſt, ſi quodam in puncto, quod a centro C (*fig.* 4.) data quantitate b diſtet, conſideretur U aequalis gravitati prope Telluris ſuperficiem, ſcilicet pro conſtanti habeatur vis ad Terrae centrum acceleratrix $=g$. Quo in caſu $U:g::b^2:z^2$

ob

ob inversam quadratorum distantiae rationem; ideoque $U\,dz = b^2 g z^{-2} dz$, ac proinde $b^2 g z^{-2} dz = -c\,dc$, & integrando $-\frac{b^2 g}{z} + const. = \frac{c^2}{2}$. Hujus autem constantis valor erui commode potest, si animadvertatur, quando $z = a$ esse $c = P$ celeritati projectionis (n. XXVI). Inde enim $-\frac{b^2 g}{a} + const. = -\frac{P^2}{2}$, & $const. = \frac{b^2 g}{a} - \frac{P^2}{2}$.

Substituendo itaque obtinetur $-\frac{b^2 g}{z} + \frac{b^2 g}{a} - \frac{P^2}{2} = -\frac{c^2}{2}$, $c = \sqrt{[P^2 - 2b^2 g(\frac{1}{a} - \frac{1}{z})]}$, formula, quae Planetarum velocitatem exprimit in quovis eorum trajectoriae puncto.

XLVIII. In hac vero formula indeterminata h occurrit, quam determinare oportet. Ad quod sint f, h altitudines celeritatibus c, P debitae. Cum altitudo, ex qua celeritas acquiritur, aequalis sit celeritatis ipsius quadrato per duplam vim gravitatis diviso, ut constat ex Mechanicae elementis, erit $h = \frac{P^2}{2g}$, $P^2 = 2gh$, $f = \frac{c^2}{2g}$, $c = \sqrt{2fg}$. Celeritatis igitur formula superioris numeri convertitur in $\sqrt{2fg} = \sqrt{[2gh - 2b^2 g(\frac{1}{a} - \frac{1}{z})]}$, quae reducitur ad $\sqrt{2ab^2} = \sqrt{(2afz + 2b^2 z - 2ahz)}$; ideoque $z = \frac{ab^2}{b^2 - a(h-f)}$.

Jam

Jam vero, si focus F Planetarum ellipseos A M *a m* (*fig.* 1) transferatur in A revolutionis celeritas, eidemque debita altitudo evanescente curva evanescent, & radius vector z confundetur cum axe transverso, quem $2r$ dicimus, fietque $z = 2r = \frac{ab^2}{b^2 - ah}$.

Advertendum modo, axem conjugatum in ellipsi $= 2k = 2\sqrt{(r^2 - e^2)}$, si e dicatur excentricitas; & $e = a - r$. Ergo $2k = 2\sqrt{(2ar - a^2)} = \frac{2a\sqrt{ah}}{\sqrt{(b^2 - ah)}}$; ideoque $p \left(= \frac{2k^2}{r}\right) = \frac{4a^2h}{b^2}$. Quibus duabus aequationibus duo eliciuntur k valores. Nam $p = \frac{2k^2}{r}$ exhibet $k = \sqrt{\frac{rp}{2}}$; $\frac{2k^2}{r} = \frac{4a^2h}{b^2}$, $k = \frac{a}{b}\sqrt{2br}$.

Sit itaque arcus aG $= P = \sqrt{2gb}$ spatium vi projectionis descriptum tempore 1"; area eodem tempore descripta erit $= \frac{aP}{2}$, cum sit in hoc casu non jam A F, sed opposita aF $= a$.

Notum est ex doctrina quadraturae curvarum, superficiem integrae ellipseos aequalem esse superficiei circuli, cujus diameter media proportionalis sit inter axes ejusdem ellipseos; superficiem autem circuli aequalem esse producto ex circumferentia in radii dimidium. Si ergo integrae ellipseos area tempore periodico t descripta dicatur E, assumaturque circulus radio $\sqrt{rk}$ descriptus, erit $2\pi\sqrt{rk}$ ejusdem circuli

peripheria, superficies vero $\pi r k$; ideoque & $E = \pi r k$. Sed $\frac{aP}{2} : \pi r k :: 1'' : t$ (n. XXVI.). Ergo $t = \frac{2\pi r k}{aP} = \ldots$ $\frac{2\pi r k}{a\sqrt{2hg}} = \frac{\pi r}{a} \sqrt{\frac{pr}{gh}} = \frac{2\pi r}{b} \sqrt{\frac{r}{g}}$. Ergo $b = \frac{2\pi r}{t} \sqrt{\frac{r}{g}}$.

Ut vero b valor ulterius etiam determinari possit, innotescant necesse est numerici valores g, $2r$, t. Ad primum quod attinet, ex Mechanicae elementis compertum est, gravitatem corporis absque ullo exteriori impulsu ad Terrae superficiem delabentis esse $g = \frac{2s}{T}$ si s dicatur spatium a corpore descriptum, T tempus descriptionis. Cum itaque ex Hugenii calculis constet, gravia, sublata aeris resistentia, 1'' tempore pedes Paris. 15, 092 describere, erit $g = 30, 184$ pedibus. Valor autem $2r$, t ex observationibus erui debet.

XLIX Cum itaque nulla amplius indeterminata quantitas in Planetarum celeritate occurrat, investigandum modo, quibus in punctis maxima ea sit, in quibus minima.

Resumatur itaque aequatio numeri XXXXVII. $c = \sqrt{[P^2 - 2b^2 g(\frac{1}{a} - \frac{1}{z})]}$. Facta distantia aphelia $= a$, patet z esse non posse majorem a. Sit itaque $z = a - \omega$, eritque $c = \sqrt{[P^2 - 2b^2 g(\frac{1}{a} - \frac{1}{a-\omega})]}$ $= \sqrt{(P^2 + 2b^2 g \frac{\omega}{a(a-\omega)})}$. Qua ex formula colligitur,

cele-

celeritatem futuram minimam, cum $\omega = o$, seu $z = a$; hoc enim in casu alter terminus evanescit.

Facta vero distantia perihelia $= a'$, patet z minorem esse non posse a'. Fiat igitur $z = a' + \omega$, eritque $c = \sqrt{[P^2 - 2b^2 g(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'+\omega})]} = \sqrt{[P^2 + \ldots\ldots}$ $2b^2 g(\frac{1}{a'+\omega} - \frac{1}{a})]$. Terminus $2b^2 g(\frac{1}{a'+\omega} - \frac{1}{a})$ erit semper positivus, eo quod $a' + \omega < a$, ideoque $\frac{1}{a'+\omega} > \frac{1}{a}$. Evidens autem est, quod facta $\omega = o$, obtinetur z valor major, quam in alio quovis casu. Ergo celeritas c maxima erit cum $z = a'$, scilicet cum Planeta in perihelio versatur.

Hoc idem deduci potest ex iis, quae numero XXVII. demonstrata sunt. Normalis enim q maxima est in aphelio, minima in perihelio.

Ergo Planetarum celeritas maxima, vel minima erit, cum z apsidum lineam attingit, maxima scilicet in perihelio, minima in aphelio; quod ex ipso virium illic augmento, hic decremento perspicuum est.

L. Facili autem ratione determinari potest in coelo locus lineae apsidum in cujusvis Planetae orbita. Cum enim prope apsides tangentialis vis directio rectum angulum constituat cum radio vectore, aut axe transverso, patet, celeritatem circa apsides uniformem futuram.

G 2 Sint

Sint itaque (*fig.* 5.) A', a' duo opposita puncta in Planetae alicujus orbita, in quibus Planeta conjunctionis tempore e Terra observatus uniformiter moveri videatur, seu prope apsides versetur. Sit T ejus periodicum tempus, t tempus illud, quo ex a' per a transit in A, t' vero illud, quo ex A' per A fertur in a', eritque $t' = T - t$. Posito quod linea Aa ea sit, quam exquirimus, investigemus tempus t'', quo Planeta e supposito aphelio A' ad verum A pervenit. Cum ex omnibus lineis, quae per focum F transeunt una Aa ellipsim ABab in duas aequales partes dividat, illud tantummodo tempus, quo Planeta ex A in a, & ex a in A defertur, erit $= \frac{T}{2}$. Et quoniam area $a'Fa$ $<$ AFA', semiellipsis major erit elliptico spatio . . a' F A'aa', minor vero spatio. A' A a' F A', ideoque $t < \frac{T}{2}$ & $t' > \frac{T}{2}$ (n. xxxix.). Si igitur perihelia celeritas aequalis sit c, aphelia c', erit $c : c' :: t'' : \frac{c't''}{c}$ tempus, in quo describetur arcus aa'. Cum itaque differentia semiellipseos ab area $a'a$A'Fa' aequalis sit differentiae sectorum AFA', aFa', erit $\frac{T}{2} - t = t'' - \frac{c't''}{c}$, & $cT - 2ct = 2ct'' - c't''$, & $t'' = \frac{c(T-2t)}{2(c-c')}$. Detecto itaque tempore, quo Planeta a supposito aphelio ad verum pervenit, cui nam coeli puncto illud respon-

deat

deat ſimul detegitur, ideoque apſidum linea in coelo determinatur.

LI. Quae cum ita ſint, facili quidem negocio dignoſci poterit orbitae punctum, in quo dato quovis tempore Planeta verſatur; ejuſdem ſcilicet Vera Anomalia, ſeu ab aphelio diſtantia determinari. Quod ut commodius obtineatur, fingendum animo eſt, Planetam uniformi celeritate moveri, ideoque anomaliam temporibus proportionalem deſcribere. Hujuſmodi anomaliam, quae dato tempore ſemper data eſt *Mediam* Aſtronomi nuncuparunt, nos m aequalem facimus. Data itaque anomalia m Planetae alicujus, ſuper axem A a veluti diametrum deſcribatur circulus aPAp, qui *Excentricus* dici ſolet. Poſito quod Planeta, cujus vera anomalia exquiritur, & alius quidam medius, ad quem media pertineat anomalia eodem tempore ex A proficiſcantur ille per ellipſim aBAb, hic per *Excentricum*, ſi facta de more ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, dicatur T tempus periodicum, t vero tempus, quo media anomalia deſcribitur, ſitque $BA=1$, erit $T:t::2\pi:m$ (n. XXVI.) $=\frac{2\pi t}{T}$.

Sit itaque angulus AFR anomalia vera $=v$, k ſemiaxis conjugatus orbitae ellipticae, $FC=e$, $CQ=x$, E ſuperficies ellipſeos, C ſuperficies excentrici, a ellipticus ſector ARF, a' circularis ſector AFP, ϵ demum anomalia excentrica, ſeu angulus ACP.

Ex

Ex doctrina quadraturae curvarum $E : C :: k : 1 :: QR = y : QP = \surd(1 - x^2) :: a : a^2$. Ergo $E : a :: C : a^2$, & $T : t :: C = \pi :$ PFA (n. XXXIX) $= \frac{\pi t}{T} = AP \times \frac{AC}{2} + ..$ $CF \times \frac{PQ}{2} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{e \, sin. \, \epsilon}{2}$, & $\epsilon + e \, sin. \, \epsilon = \frac{2 \pi t}{T} = m$; seu, si ad obtinendam terminorum homogeneitatem recta linea $e \, sin. \, \epsilon$ in arcum ex notis regulis convertatur, $\epsilon + \frac{180^\circ \, e \, sin. \, \epsilon}{\pi} = m$.

Quae aequatio duplici falsa positione, ut moris est, resoluta excentricae anomaliae ϵ valorem exhibet. Data autem anomalia excentrica, facile anomalia vera determinatur, si prius demonstretur, quod

LII. Si in triangulo rectangulo OCM (*fig.* 2) acutus angulus OCM $= f$ in duas aequales partes linea CF dividatur, posito angulo FCO $= m$, MO $= p$, CO $= r$, CM $= n$, OF $= l$, FM $= q$, erit *tang.* $m =$ *tang.* $\frac{1}{2} f = \frac{p}{r+n}$. Hoc vero nil luculentius. Nam in triangulo OCF $\frac{l}{r} =$ *tang.* m. Sed cum angulus f in duas aequales partes divisus sit, $r : n :: l : q$, ideoque $r : r+n :: l : l+q$, scilicet $r : r+n :: l : p$. Ergo $\frac{l}{r} = \frac{p}{r+n}$ $=$ *tang.* $\frac{1}{2} f$.

LIII. Jam vero *In orbita elliptica radix quadrata distantiae apheliae est ad radicem quadratam distantiae periheliae, ut tangens dimidiae anomaliae excentricae*

ad

ad tangentem dimidiae anomaliae verae ; fcilicet (*fig.* 5.) $\sqrt{(1+e)}:\sqrt{(1-e)}::$ *tang.* $\frac{1}{2}\epsilon$: *tang.* $\frac{1}{2}v$.

Sit FR $= z$. Erit ex numero fuperiori *tang.* $\frac{1}{2}\epsilon$: *tang.* $\frac{1}{2}v :: \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x+1} : \frac{y}{e+x+z}$. Sed, ut conftat ex conicis, $\sqrt{(1-x^2)}:y::1:k$, & $e+x+z=(1+x)\times(1+e)$ cum fit $z=1+ex$. Ergo fubftituendo *tang.* $\frac{1}{2}\epsilon$: *tang.* $\frac{1}{2}v :: 1+e:k::1+e:\sqrt{(1-e^2)}$; & dividendo ultimos terminos per $\sqrt{(1+e)}$, *tang.* $\frac{1}{2}\epsilon$: *tang.* $\frac{1}{2}v$:: . . $\sqrt{(1+e)}:\sqrt{(1-e)}$.

Ergo *tang.* $\frac{v}{2}=\frac{\sqrt{(1-e)}\times tang.\ \frac{1}{2}\epsilon}{\sqrt{(1+e)}}$. Datis igitur ex obfervationibus diftantiis aphelia, & perihelia, inventaque excentrica anomalia, anomaliae verae valor habebitur; innotefcet nimirum Planetae poft datum tempus in orbita fua locus.

LIV. Data autem anomalia vera, feu angulo a F G (*fig.* 1), facile detegi poteft abfoluta diftantia FG corporis, feu Planetae G ellipfim a M m defcribentis.

Et re quidem vera fit $CA = Ca = a$, $CD = b$, $Cf = CF = e = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, $GZ = y$, $CZ = x$, $FZ = u$, eritque $\pm x = \pm (u - e)$, prout punctum Z jacet inter f, & a, vel inter F, & A. Sit infuper $FG = z$, & angulus a $FG = v$.

Ex ellipfeos natura $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, unde $y^2 + u^2 = z^2 = \frac{b^2(a^2-x^2)+a^2u^2}{a^2} =$ . . . .

$a^4 +$

$\frac{a^4 + 2a^3 eu - 2a^2 e^2 + e^2 u^2 - 2e^3 u + e^4}{a^2}$ ob $b^2 = a^2 - e^2$, & $z = a + \frac{eu}{a} - \frac{e^2}{a^2}$. Sed $u = z \; cos. \; v$. Ergo $z = a + \ldots \frac{ez \; cos. \; v}{a} - \frac{e^2}{a}$; & demum $FG = z = \frac{a^2 - e^2}{a - e \; cos. \; v}$, ſeu poſito $a = 1$, $z = \frac{1 - e^2}{1 - e \; cos. \; v}$, ſeu etiam (ob $1 - e^2 = b^2 = \frac{ap}{2} = \frac{p}{2}$) $= z \cdot \frac{\frac{1}{2} p}{1 - e \; cos. \; v}$.

LV. Sed exquiri poſſet tempus, quo anomaliam veram A F R (*fig.* 5.) Planeta deſcribit, hoc eſt valor ipſius t. Ut igitur illud determinemus, ſupponendum eſt, quo loco radius vector z fit aequalis r, illo ipſo angulum, quem ille cum tangente conſtituit aequalem fieri n, ejuſque celeritatem effectivam $= c$. Aſſumpto vectore radio F I infinite proximo, deſcriptoque arcu Iu, ut ſuperius numero XXVII, ſi fiat $RI = ds$, $RFI = dv$ in triangulo rectangulo R I u erit $Iu = ds \; sin. n$. Et quoniam $dv = ds$, $sin. n = r$, $ds \; sin. n = r dv$, $ds = \frac{r dv}{sin. n}$, indeque $c = \frac{ds}{dt} = \frac{r dv}{dt \; sin. n}$, & $\frac{dv}{dt} = \frac{c \; sin. n}{r}$.

Si itaque reſumatur aequatio ſuperioris numeri XXVII. $\frac{z^2 dv}{dt} = B$, & radio vectori z ſubſtituatur r, quantitati autem $\frac{dv}{dt}$ ipſius valor $\frac{c \; sin. n}{r}$, fiet $r c \; sin. n = B$;

&

& ideo, quoniam $z^2 dv = B dt = rc\ sin. n \times dt$, erit $\int z^2 dv = 2\mathrm{RFA}$ (n. XXVII.) $= B t = t \times \ldots$ $rc\ sin. n$, & $t = \frac{2\mathrm{RFA}}{rc\ sin. n}$ fine conftanti, eo quod fuppofito in A periodici temporis initio, fiat $t = 0$, cum $\mathrm{RFA} = 0$.

Jam vero fi in aequatione illa $t = \frac{2\mathrm{RFA}}{cr\ sin. n} = \frac{\int z^2 dv}{cr\ sin. n}$ loco z fubftituatur ejus valor $\frac{\frac{1}{2}p}{1 - e\ cos. v}$ (n. LIII.), fiet

$$t = \frac{\int z^2 dv}{rc\ sin. n} = \frac{\frac{1}{4}p^2}{rc\ sin. n}\int \frac{dv}{(1 - e\ cos. v)^2} = \frac{\frac{1}{4}p^2}{rc\ sin. n} \times \ldots\ldots$$

$$\left[\frac{2e(1 - cos. v)}{sin. v(1 - e^2)\left(1 - e + \frac{1 - 2\,cos. v + cos.^2 v + e - 2e\,cos. v + e\,cos.^2 v}{sin.^2 v}\right)}\right.$$

$$\left. + \frac{2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \times arc.\ tang. \frac{(1 + e)(1 - cos. v)}{\sqrt{(1 - e^2)}\,sin. v}\right] = \ldots$$

$$\frac{\frac{1}{4}p^2}{rc\ sin. n}\left(\frac{e\ sin. v}{(1 - e^2)(1 - e\ cos. v)} + \frac{2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \times \ldots\ldots\right.$$

$\left. arc.\ tang. \frac{(1 + e)\,sin. v}{(1 + cos. v)\sqrt{(1 - e^2)}}\right)$ abfque conftanti, ut fupra.

LVI. Quae huc ufque demonftravimus Copernicano Syftemati convenirent, etiamfi vis illius, qua Planetae projecti funt, directio per eorum gravitatis centrum tranfiret. Nos vero per illud non tranfire fuppofuimus (n. XXXII.). In hypothefi igitur noftra vis projectionis impulfus, ut quaedam partium additio, vel cujufdam potentiae applicatio confiderari debet,

qua Planetarum circa axem aequilibrium perturbetur; ita ut non modo progressivo circa Solem motu revolvi debeant, sed & interim circa proprium axem rotatione quadam torqueri. Hunc autem rotationis motum vel tardiorem, vel celeriorem futurum esse, prout projectionis directio per punctum vel propius, vel remotius a centro gravitatis transierit, facile intelligitur. Si enim in Planeta BDEa (*fig. 6.*) linea D d sit projectionis directio, C centrum gravitatis; quo longior erit AC, eo potentia motrix in A applicata majorem exeret vim.

LVII. Ex hoc vero rotationis motu vim quamdam centrifugam Planetarum partes concipere debent, & si quidem initio fluida fuisse intelligantur, ut ex naturali Telluris nostrae historia verosimillimum sit, ad aequatorem adsurgere, ad polos deprimi. Quae vis cum celeritati rotationis proportionalis sit, maxima evadet ad aequatorem, minima ad polos; ejus vero quantitas lineola $Sn = PE = \frac{ES^2}{2CS}$ pro infinitesimo tempore determinatur. Inde autem gravitatis vis, quae centrifugae opponitur, major erit ad polos, quam ad aequatorem.

LVIII. Quae in Copernicana hypothesi futura esse Mechanica, & Geometria demonstrant usque hactenus perscrutati tempus est, ut quae phaenomena observanda sint breviter exponamus. Quo vero facilius

lius ea, quae in posterum dicturi sumus intelligi possint, nonnulla de opticis apparentiis praemittenda putavimus.

LIX. Primo itaque sint in *fig.* 7. D, D' duo objecta, quae distantiis $ID = d$, $ID' = d'$ iisdem temporibus, & ex eadem parte spatia $DB = s$, $D'B' = s'$ describant; anguli $DIB = a$, $D'IB' = b$ apparentia spatia descripta, seu apparentes celeritates repraesentabunt; aequalibus siquidem temporibus habetur $s = c$, $s' = c'$, symbolis c, c' celeritates apparentes exprimentibus.

Jam vero in triangulis rectangulis IDB, ID'B' $1 : c :: cot. a : d = c \; cot. a$, $1 : c' :: cot. b : d' = c' \; cot. b$, ideoque $d : d' :: cot. a : cot. b$. Et quoniam $cot. a = \frac{1}{tang. a}$, erit $d : d' :: \frac{c}{tang. a} : \frac{c'}{tang. b}$, & $tang. a :: tang. b :: \frac{c}{d} : \frac{c'}{d'}$. Cum vero maximis in distantiis tangentes ab arcubus non differant, $a : b :: \frac{c}{d} : \frac{c'}{d'}$.

LX. Hinc si habeatur $a = o$, erunt c, & $\frac{c}{d} = o$; ideoque, si D celeritatem versus B non habeat, etiamsi versus D feratur, stare videbitur. Quod si $c : c' :: d : d'$, erit $a = b$, & D, D' aequali celeritate moveri videbuntur; celeritates autem apparentes reapse aequales erunt, si $c = c'$, $d = d'$.

LXI. Quo quidem in casu & alia habetur apparentia. Si enim duo corpora K, F eadem celeritate

moveantur, ideoque locum ad ſe habita ratione non mutent, mutent vero ſi tertium quoddam immobile C' ſpectetur, cum oculus ex ſucceſſiva mutatione angulorum de motu judicet, motum corporum K, F corpori C' tribuet in oppoſitam partem. Ex quo tria deduci poſſunt.

LXII. 1. Si cum corporibus K, F & oculus I non animadverſo motu feratur, motus omnis corpori C' tribuetur, hujuſmodique apparens motus contrarius erit, ſed ſimilis, & parallelus vero oculi motui.

2. Quod ſi autem pariter cum oculo I, & corporibus K, F moveatur etiam C' in eamdem partem, ſed minori celeritate, C' in contrariam partem moveri videbitur cum differentia celeritatum.

LXIII. 3. Sit corpus lucidum, immotumque H, cujus radius Hd in I perveniat, cum oculus in b verſatur, & ad d progrediatur eodem tempore, quo oculus ſpatium $b\,d$ percurrit, ita ut lucis celeritas ſit Id, oculi vero $b\,d$, compleaturque parallelogrammum Pb. Celeritas Id reſolvi poterit in duas IP, Ib, quarum IP cum ad oculum quod attinet, nulla ſit, lucidum corpus per unicum radium bI in Z videbitur. Facta itaque I$d = c$, $b\,d = c'$, $a =$ *ang.* bI$d =$ HIZ aberrationi corporis H, & $\varphi = b\,d$I angulo directionum radii, & oculi, erit ex trigonometricis reſolutionibus $tan.\,a = \frac{c'\,sin.\,\varphi}{c - c'\,cos.\,\varphi}$ vel, ſi $\varphi = 90°$, $tang.\,a = \frac{c}{c'}$, vel, ſi an-

guli

guli b, d pro aequalibus assumi possint, $sin.\, a = \frac{c' \, sin.\, \varphi}{c}$.
Inde vero in hypotesi $\varphi = 90°$ eruitur 1. Si $c = c'$, $tang.\, a = 1$, $a = 45°$; scilicet H a suo vero loco integris 45° distare videbitur. 2. Si $c = \infty$, erit $tang.\, a = o$, $a = o$, ideoque corpus G in suo loco apparebit, ac generatim eo minor erit a, quo c major erit c'.

Hic vero observandum, quod si oculus motu sensibiliter circulari in gyrum feratur, tria potissimum fieri posse, scilicet; 1. ut oculus sit in plano hujus circuli, 2. in polis, 3. inter circuli polos, ac planum. Jam vero in primo casu arcus, seu planum aberrationis, quod opticus axis perpetuo radit recta linea videbitur, & oculus tota revolutionis periodo corpus illud H in vero loco bis observabit. In altero autem casu aberratio directe conspecta circulus videbitur; tertio demum oblique observata ellipseos imaginem praeseferet.

LXIV. Quibus ita praeconstitutis, quae in Copernicana hypothesi Terrae incolis phaenomena observanda sint quisque intelligit. Et quidem cum duobus motibus Tellus affici debeat, progressivo altero circa Solem, rotationis altero circa proprium axem (n. LVI.), quae ex hisce motibus oriantur singillatim considerandum est.

Primo itaque cum Terrae incolae circa Solem non observato motu per ellipsim revolvantur (n. XXXVII.)

xxxvii.), Solem circa immotam Tellurem contrario, sed simili motu in elliptica orbita revolvi arbitrabuntur (n. lxii.). Fixa autem sidera loco suo aberrare, secundum ea, quae superiori numero protulimus, videri debent.

Sed & Planetarum motus non idem semper observabitur. Nam, praeterquamquod ii circa immotam Tellurem revolvi censebuntur, directi modo, modo stationarii, modo retrogradi apparere debent. Operae itaque pretium erit, quando hujusmodi motus varietates observandae sint determinare.

LXV. Ad quod sint in *fig.* 9. proxime concentricae, & circulares orbitae T A, P M, & Terram in puncto T, Planetam in P versari supponatur. Agatur P K = T C, eidemque parallela, & opposita; sint vero tangentes T C, P C' proportionales celeritatibus Telluris, & Planetae.

Cum non eadem celeritate Tellus, & Planeta moveantur, hic per directionem suae oppositam, & parallelam moveri Terrae incolis videbitur (n. lxii.); ideoque cum Tellus per T C moveatur, Planeta per P K parallelam T C moveri putabitur. Ejus autem vera directio est per P C'. Ergo si parallelogrammum C' K compleatur, per ejus diagonalem P D Planeta moveri videbitur eodem tempore, quo Tellus percurrit T C, ideoque angulus D T P, seu D T L angularem Planetae motum dimetietur. Quando igitur hujusmodi

modi angulus erit $= o$, Planeta ſtationarius apparebit. Id autem quo in casu fiet?

Hoc ut ſtatui poſſit, producantur PT in E, & in I, & C'D in I, agantur normales SE, C'Q, DL, & STP angulus *Elongationis*, is ſcilicet, quo differentiae longitudinum geocentricarum Solis, & Planetae aequantur, fiat $= e$, $TPS = p$, $ST = R = 1$, $SP = r$, $PT = r'$, $TC = c$, $PC' = c'$, angulus autem $DTL = x$.

Itaque in triangulo C'PI $sin.\, C'IQ : sin.\, C'PI :: c' : C'I$. Sed $sin.\, C'IQ = sin.\, CTE = cos.\, ETS = cos.\, e$; & $sin.\, C'PI = sin.\, C'PQ = cos.\, p$. Ergo $C'I = \frac{c' \, cos.\, p}{cos.\, e}$. In triangulo autem IDL, $1 : sin.\, DIL :: ID : DL$. Sed $sin.\, DIL = sin.\, C'IQ = cos.\, e$; & $ID = C'I \mp C'D = \frac{c' \, cos.\, p \mp c \, cos.\, e}{cos.\, e}$. Ergo $DL = c' \, cos.\, p \mp c \, cos.\, e$. Et demum TL, ſeu $TP (= r') : LD :: 1 : sin.\, x = \ldots \frac{c' \, cos.\, p \mp c \, cos.\, e}{r'}$ (poſitivo ſigno aſſumpto, cum Planeta, quoad nos, eſt citra Solem S, negativo, quando eſt ultra illum). Et quoniam in orbitis circularibus celeritates ſunt ut radiorum radices, ſcilicet $c : c' :: \sqrt{r} : \sqrt{R} :: \sqrt{r} : 1$, $sin.\, x = \frac{1}{r'} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} cos.\, p \mp cos.\, e \right)$.

Si ergo fiat $x = o$, erit $cos.\, e = \frac{cos.\, p}{\sqrt{r}}$; & cum ſit $r : R :: sin.\, e : sin.\, p = \frac{R \, sin.\, e}{r}$, & $cos.\, p = \frac{1}{r} \sqrt{(r^2 - sin.^2 e)}$, erit

rit $cos.^2 e = \frac{cos.^2 p}{r} = \frac{r^2 - sin.^2 e}{r^2} = 1 - sin.^2 e$; ideoque $sin. e = \pm r \sqrt{\left(\frac{1-r}{1-r^3}\right)} = \frac{\pm r}{\sqrt{(1+r+r^2)}}$, & $cos. e = \ldots \sqrt{\left(\frac{1+r}{1+r+r^2}\right)}$, unde demum $tang. e = \frac{\pm r}{\sqrt{(1+r)}}$, ac si tempora periodica Telluris, & Planetae t, τ dicantur, cum sit $t^2 : \tau^2 :: 1 : r^3$ (n. XLV.) $tang. e = \ldots\ldots\ldots$
$$\pm \frac{\tau^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{1}{3}} \sqrt{\left(t^{\frac{2}{3}} + \tau^{\frac{2}{3}}\right)}}.$$

Quotiescumque igitur valor tangentis anguli elongationis hujuscemodi formula exprimetur, angulus ille, qui angularem Planetae motum dimetitur, evadet $= o$; atque ideo Planeta Terrae incolis stationarius apparebit.

Quod si vero Planetarum trajectoriae non circulares, sed ellipticae (ut re vera sunt) considerentur, atque exinde Stationum loca corrigere libeat, animadvertendum erit, superiorem illam analogiam $c : c' :: \sqrt{r} : 1$ circulis peculiarem, in quibuslibet similibus trajectoriis, quarum parametri dicantur m, m' evadere $c : c' :: \frac{\sqrt{m}}{q} : \frac{\sqrt{m'}}{q'}$, ex eo, quod superius (n. XXXVI.) deduximus ex numero XXVII. In ellipsibus autem, si dicantur R, r' semiaxes transversi, b, b' conjugati, n, n' normales, k, k' excentricitates, x, x' abscissae, ac z, z' radii vectores, erit $q = \frac{m z}{2 n}$, $q' = \frac{m' z'}{2 n'}$, ut ex Conicis

notum

notum eſt. Ergo $c : c' :: \frac{n}{z\sqrt{m}} : \frac{n'}{z'\sqrt{m'}}$. At $n = \ldots \frac{b}{R^2}\sqrt{(R^4 - k^2 x^2)} = \frac{1}{R^2}\sqrt{\frac{Rm}{2}}\sqrt{(R^4 - k^2 x^2)} = \ldots \sqrt{\frac{Rm}{2}}$ (quando ſcilicet excentricitas tantula eſt, ut ipſius quadratum negligi poſſit) ideoque & $n' = \ldots \sqrt{\frac{r'm'}{2}}$; ergo $c : c' :: \frac{\sqrt{R}}{z} : \frac{\sqrt{r'}}{z'} :: \frac{1}{z} : \frac{\sqrt{r'}}{z'}$.

Jam revocata ſuperiore illa aequatione $sin. x = \frac{c' cos. p \mp c\, cos. e}{r'}$; ac poſito $x = o$, ob hypotheſim ſtationis, habebimus $o = c' cos. p \mp c\, cos. e$; $cos. p : cos. e :: c : c' :: \frac{1}{z} : \frac{\sqrt{r'}}{z'}$. Sed $sin.$ STP $= sin.$ STE $= sin. e$, & propterea SE $=$ ST. $sin. e = z\, sin. e$, $sin.$ SPE $= \frac{SE}{SP} = \ldots \frac{z\, sin. e}{z'}$, & $cos.$ SPE $= cos. p = \sqrt{\left(1 - \frac{z^2 sin.^2 e}{z'^2}\right)} = \ldots \frac{1}{z'}\sqrt{(z'^2 - z^2 sin.^2 e)}$; ergo $\frac{1}{z} : \frac{\sqrt{r'}}{z'} :: cos. p : cos. e :: \frac{1}{z'}\sqrt{(z'^2 - z^2 sin.^2 e)} : cos. e$, ſeu $sin.$ STE $= sin. e = \ldots z'\sqrt{\left(\frac{r'z^2 - z'^2}{r'z^4 - z'^4}\right)}$. Quare ſi anomaliae verae angulus in Terrae orbita ſtatuatur v, in orbita autem alterius Planetae v', atque idcirco $z = \frac{1 - k^2}{1 - k\, cos. v}$, $z' = \frac{r'^2 - k'^2}{r' - k'^2 cos. v'}$ (n. LIV.), ſubſtitutis hiſce valoribus, neglectiſque praeterea ſecundis excentricitatum poteſtatibus, habebitur noviſſima, at ſatis implicata ipſiuſmet $sin. e$ expreſſio.

Directus autem videri debet Planeta, quotieſcumque apparentis motus linea in eadem parte jacebit, in quam ille dirigitur, quotieſcumque autem in oppoſita parte, retrogradus. Cum vero primum fiat, ſi $C'D < C'I$, alterum autem, ſi $C'D > C'I$, patet, quando Planetae directi apparere debeant, quando retrogradi.

Facile autem animo concipi poteſt, unde nam opticae hujuſmodi illuſiones oriantur. Oculus ſiquidem in Terra T locatus ſuperiori Planetae in GV circa oppoſitionem, inferiori autem in RP' circa conjunctionem occurrens, tardiorem primum praecedit, & exinde retrogradum judicat (n. LXII.) a ♏ in ♎, non ſecus ac alterum ob ejus directionem RP' contrariam ordini Signorum ♈, ♉, ♊. Si vero cum Tellus in XT verſatur, Planeta ex Z progreditur in Y, directus videri debet.

LXVI. Nullus autem tam rudis eſt, qui non intelligat ex Telluris rotationis motu eadem effici debere, quaſi ſtante Terra, Sol, & ſidera omnia circa eam converterentur.

LXVII. Quae ergo in Copernicana hypotheſi tum Geometriae, tum Mechanicae leges futura demonſtrant, ſi ad progreſſivum Planetarum motum ratio habeatur, eo potiſſimum recidunt, ut Planetae in ellipſibus circa Solem communem focum revolvantur (n. XXXVII.) areas deſcribentes deſcriptionis

tem-

temporibus proportionales (n. XXXIX.); integram revolutionis periodum iis absolvant temporibus, quae sint inter se in sesquiplicata ratione mediarum distantiarum a Sole (n. XLV.) ; ea celeritate, quae maxima sit in perihelio, minima in aphelio (n. XLIX.); iisque legibus, ut post datum quodvis tempus, eorum orbitae punctum illud, in quo versantur facili calculo innotescat (n. n. LIII. LV.); in hujusmodi autem absolvenda periodo circa Tellurem cum Sole revolvi (n. LXIV.) censeantur directi modo, modo retrogradi, modo stationarii (n. LXV.) : fixa demum sidera suo loco aberrare videri debeant (n. LXIV.).

Ad motum autem rotationis quod attinet, Planetae sphoeroidicam figuram acquirere, corpora autem omnia, quae eorum superficiebus insistunt, vi quadam centrifuga affici debent minima ad polos, maxima ad aequatorem; ideoque eorum gravitas non eadem futura est ad polos, quae ad aequatorem (n. LVII.): eaque demum omnia effici debent, quasi circa immotam Tellurem coelum omne rotaret (n. LXVI.).

LXVIII. Haec vero nonne cum iis, quae improba astrorum contemplatione, & accuratissimis observationibus patefacta sunt, apprime conveniunt?

Quae aliae sane ab immortali Keplero tanta sedulitate, tantoque labore statutae sunt leges (34)?

(34) V. *Bailly Hist. de l'Astro. Mod. T. 2. L. 1. & 2.*

Quem latet Aſtronomum, Planetarum celeritatem maximam eſſe in perihelio, minimam in aphelio (35)? Nullus quidem ex Copernicano Syſtemate Planetarum ſuis in orbitis loca calculo exquirens in eos incidit errores, quibus Ptolemaicae theoriae falſitas Regiomontano, & Purbachio primum innotuit (36). Quis fixarum obſervatae antea aberrationis cauſſam Bradleyum detexiſſe ignorat (37)? Celeberrimos autem Epicyclos illos Planetarum circulis nonne Veteres potiſſimum commenti ſunt, ut inde explicari poſſent illorum ſtationes, ac retrogradationes, quae tunc potiſſimum obſervantur, cum obſervandas eſſe ſuperius demonſtravimus (38)?

Sphoeroidalem vero Planetarum figuram quis in dubium revocaverit, cum ea & Jovem, & Tellurem noſtram donari obſervationes demonſtrent (39)?

Terreſtrium autem corporum centrifuga vis non modo detecta eſt, ſed etiam calculo ſancitum, eam eſſe

(35) V. *De la Lande Astro.*

(36) V. *Bailly* — — *T.* 1. *pa.* 314. *Ed.* 1785.

(37) V. — — — *T.* 2. *L.* 14.

(38) V. — *Hiſt. de l' Aſtro. Anc.*, & *de la Lande Aſtron.*

(39) Dominicus Caſſinius Sphoeroidalem Jovis figuram primus detexit. Schortius autem ejus axium rationem invenit 13 : 14. V. *Bailly Hiſt. de l' Aſtr. Mod. T.* 2. *L.* 8. §. 14. & *De la Lande Aſtr. T.* 3.

ſe Aequatorem $\frac{1}{287}$ circiter gravitatis in eodem loco; & ex Newtoni ſupputationibus haberi poteſt 289. vicibus circiter minor integra gravitate in latitudine Florentiae (40).

Nil de gravitatis variationibus, & diurni motus phaenomenis addimus, cum alterum omnibus compertum ſit (41), alterum per ſe pateat.

LXIX. Cum igitur ea, quae Copernicanum Syſtema expoſtulare deprehendimus reapſe haberi obſervatio demonſtret, maximum inde de ejus veritate argumentum exſurgit. Quam quidem omnem extra dubitationis aleam ponunt univerſales naturae leges, in quibus providentiſſimi Conditoris infinita ſapientia adeo luculenter elucet. Gravitas ſiquidem, ſimpliciſſima ea vis, cui adſpectabilem hanc rerum omnium univerſitatem Divinus Opifex gubernandam, ut ita dicam, commiſit, cum exiguae Telluris motum circa immenſum Solem expoſtulat, tum immenſi Solis exiguam circa Tellurem reſpuit omnino. Quod re vera locum habere luculenter declarant Planetarum ſtationes, ac retrogradationes, quae in hypotheſi immotae Telluris nullo pacto explicari poſſunt. Ptolemaica enim Epicyclorum doctrina gravitati corpora in circulis revoluta ad

(40) V. *De la Lande l. c.*
(41) V. *Bailly* — *L.* 9. §. 19. *&c.*

ad immobile centrum propellenti adeo adversatur, ut nihil excogitari possit absurdius. Quantum vero a gravitatis legibus Tychonica centri duplicitas abhorreat facile quisque intellexerit, cui libeat Telluris massam, & a Sole distantiam conferre cum massa, distantiaque Planetarum, qui tamen circa Solem revolvi dicuntur. Quibus omnibus addenda est absurda ea diversorum motuum copia, quibus coelestia corpora contrarias in partes uno, eodemque tempore impellerentur. Quae quidem mancam adeo, imperfectamque Universi machinam constituerent, ut sapientissimo Numine prorsus indigna videretur.

LXX. Quid vero Copernicani Systematis augusta simplicitas? Nonne venerabilem eam majestatem, omnipotentiamque praesefert supremi illius sapientissimi Numinis cuncta supercilio moventis, naturamque universam unico suae voluntatis nutu gubernantis? Quot sane, quantique effectus uno Planetarum omnium impulsu, simplicissimaque materiae universae gravitatione gignuntur, qui semper Philosophorum animos in sui quam maximam admirationem rapuerunt? Hinc enim & anni tempestates, & coeli mutationes, quibus omnia, quae Terra pariat maturata pubescant; hinc diei, noctisque vicissitudines proficiscuntur; hinc sphoeroidalis exsurgit Terrae figura; hinc sub aequatore maris aquarum elatio; hinc Planetae nunc occultantur, nunc rursus aperiuntur, nunc abeunt, nunc

ante-

antecedunt, nunc fubfequuntur, nunc omnino ne moveri quidem videntur, fed ad quoddam tempus infiftere.

LXXI. Quae ergo ab Anaximandro ad Copernici, ac Newtoni tempora variis adeo fatis, acerrimoque bello impetita de Mundi Syftemate doctrina pervenire potuit, eam recentiores cum phyficae, tum aftronomicae obfervationes, atque eximia ipfa Naturae legum fimplicitas luculenter confirmant. Adeo illud veritati fingulare eft, atque proprium, ut ex omni ambiguitate fententiarum, & colluctantium partium ftudiis intaminata femper, ac vitio immunis emergat.

LXXII. Quod itaque fub initium Differtationis noftrae fuppofueramus (n. xxxii.), Tellurem, Planetafque omnes primarios circa Solem revolvi vi quadam projectos, cujus directio per eorum gravitatis centrum non tranfiret, jam extra omnem dubitationis aleam pofitum eft. Supereft modo ftatuendum, qua nam a centro gravitatis diftantia Planetae impelli debuerint, ut motus eos tum progreffivos, tum rotationis concipere poffent, quibus reapfe affici ex obfervationibus compertum eft. Primus omnium problematis hujufce folutionem exhibuit Johannes Bernoullius in Opufculo quodam mechanico-dynamico (42), ubi

(42) V. *Johan. Bernoullii Op. T.* 4. *p.* 281.

ubi *Spontanea Rotationis Centra* generatim confideravit.

Quae quidem folutio cum obfcuriori fortaffe methodo a fagaciffimo Geometra edita fit, eam aliquanto luculentius exhibere abs re non erit.

LXXIII. Fingamus per centrum gravitatis C (*fig. 6.*) cujufvis Planetae ductam rectam KCA normalem ad DA*d*. Ut cognofci poffit punctum A, in quo applicanda fuerit projectionis vis, feu potentia motrix, ut bini Planetarum omnium motus orirentur, indagandum primum eft punctum K, quod fit *Centrum Initiale Rotationis*, feu punctum, in quo inflexibili virga quivis Planeta fufpendi debuiffet, ut cum moveretur, ofcillationis centrum haberet in A.

Jam vero evidens eft, punctum K, fi Planeta unico rotationis motu afficeretur, tempore unius revolutionis circa C circulum defcripturum effe, qui radium haberet = CK. Cum autem eodem tempore, quo Planeta circa C rotat, progreffivo motu circa Solem deferatur; patet, punctum K tempore, quo Planeta unam circa fe revolutionem abfolvit, defcribere debere Cycloidem, quae pro generatore habeat circulum radio CK defcriptum, & pro bafi longitudinem viae, quam eodem tempore Planeta circa Solem percurrit, quamque *L* dicimus. Sed ex cycloidis genefi conftat, axem aequari peripheriae circuli generatoris. Ergo *L* aequalis eft peripheriae circuli radio CK defcripti; proindeque, fi ratio peripheriae

ad

ad radium fiat $\pi : r$, habebitur $\pi : r :: L : \mathrm{CK} = \frac{Lr}{\pi}$.

Detecta itaque distantia puncti suspensionis K a centro gravitatis C, facile determinari potest punctum A, in quo centrum oscillationis situm sit; ideoque ubi potentia motrix applicata fuerit. Centrum enim oscillationis, ac potentiae motricis applicationem in unum, idemque punctum incidere, non modo rem paullo attentius consideranti planum fiet, verum etiam Bernoullius ipse in laudato Opusculo demonstravit.

Quod ut facilius intelligi possit, totum id in Tellurem nostram transferamus. Pono homogeneam esse Terrae materiam, & gravitatis centrum cum centro ipso Telluris confundi; tum si ratio peripheriae circuli ad radium sit, ut supra, $\pi : r$, Terrae autem semidiameter R, erit ex Astronomorum sententia semidiameter terrestris orbitae, quae parum a circulo abludit $= 22000\,R$, adeoque circumferentia $= \frac{22000\,\pi\,R}{r}$. Periodicum autem Terrae circa Solem tempus $T = 365$ d. proxime, circa se ipsam vero $T' = 1$, quod idem insumitur in viae annuae longitudine L peragranda; ergo ob tempora arcis proportionalia (n. XXVI.), habebimus $T : T' :: \frac{22000\,\pi\,R}{r} \times \frac{22000\,R}{2} : \frac{22000\,R}{2} \times L$, hoc est $365 : 1 :: \frac{22000\,\pi\,R}{r} : L$; quare $L = \frac{22000\,\pi\,R}{365\,r} = \frac{4400\,\pi\,R}{73\,r}$, ac proinde $\mathrm{CK} = \frac{Lr}{\pi} = \frac{4400\,R}{73}$.

Jam vero demonſtratum eſt ab Hugenio (43), quod, ſi alicui puncto K ſphoera ſuſpenſa ſit, diſtantia C A centri gravitationis a centro oſcillationis habetur, ſi poſita analogia $KC : R :: R : \frac{R^2}{KC}$, ſumatur $CA = \frac{2 \cdot R^2}{5 \cdot KC}$. Vi ergo hujuſce regulae $CA \frac{2 \times 73 R}{5 \times 4400} = \ldots \frac{73 R}{11000} = \frac{1}{150} R$ quam proxime.

Si itaque Terra homogenea ſupponatur, & juxta recentiſſima Aſtronomorum placita ſtatuatur ejus mediocris radius $R = 19631100$ pedibus; erit $CA = \ldots 130874$ ped.; & idcirco potentia quaelibet motrix ad hanc a gravitatis centro diſtantiam perpendiculariter applicata duos motus, qui accurate ſatis annuo, & diurno reſpondeant, ipſo rerum, ac temporum initio genuiſſe dicenda eſt.

LXXIV. Simili calculo ex dato Planetarum omnium revolutionis circa Solem, & circa proprium axem tempore determinari poteſt diſtantia C K, & C A. Sic pro Marte, cujus ſemidiameter M ad ſemidiametrum Terrae R ſtatuitur, ut $3 : 5$, ita ut ſit $M = \frac{3}{5} R$ invenitur $CK = 84\ M$ quam proxime, & $CA \frac{1}{418} M$ quam proxime.

Pro Jove autem, qui ſemidiametrum N decuplo ma-

(43) *Hor. Osc. Part. 4. Prop. 22.*

majorem habet ſemidiametro Terrae, invenitur $CK = \frac{11N}{10}$ quam proxime, & $CA = \frac{7N}{19}$ quam proxime.

LXXV. Quae de Planetis Primariis circa Solem actis ſuperius demonſtravimus, ea fere omnia Satellitum circa Primarios revolutionibus convenire poſſent. Sed eae reciprocae gravitatis actiones, quibus vel Planetae ipſi Primarii in motu ſuo perturbantur, adeo ut longiori tempore alii curſum abſolvant, alii breviore, quam ſolent (44), tantis Satellitum motum implicare debent inaequalitatibus, ut nulla difficilior in univerſa Phyſica coeleſti occurrat theoria.

 Hu-

(44) Conſtat ex obſervationibus Saturni circa Solem revolutiones fieri ſemper diuturniores, & Planetae ipſius medium motum dato quocumque tempore minorem ſemper ſuccedentibus revolutionibus evadere; & contra periodicum Jovis tempus imminui, & medium motum augeri. Hiraeus in tabulis motum medium Saturni 6" ſingulis annis imminui ſtatuit; quo dato ſuas, Tychonicasque obſervationes conciliavit inter ſe invicem, & vetuſtiores alias Ptolemaei, quae 2°, aut 3° a ſuis diſſentiebant, veluti indiligentes, ac dubias penitus dereliquit. Halleyus ſpectatis omnibus obſervationibus cenſuit, decrementum omne annis 1000 eſſe 2°, 19', atque augeri ſemper in duplicata ratione temporum. Caſſinius vero 11" annis ſingulis, atque annis mille 3°, 3', 20" eſſe voluit, tempori nimirum proportionale.
Caſſinius etiam in *Actis Pariſien. Academiae ad annum* 1746. contendit, dimidio ſecundo annis ſingulis motum medium Jovis au-

Hujusmodi autem inaequalitates praesertim se produnt vi Solis in motu lunae, quae, ut cum Poeta loquar,

. . . . *Subdita nulli*
Hactenus Astronomo numerorum froena recusat.

LXXVI. Primam lunarium motuum inaequalitatem, quae *Centri Aequatio* appellatur, ejusdemque inaequalitatis correctionem, quae secunda Lunae inaequalitas, & *Evectio* etiam dicitur, veteres Astronomi comparatis saepius observationibus agnoverunt.

Ter-

---

geri; 0°, 16', 40" integris annis bis mille. Halleyus autem in tabulis motum ipsum 3°, 49' eodem tempore fuisse auctum censuit, quae Halleyana aequatio plurimis Astronomis vera major visa est. Cla. Baillyus *in Act. Ac. Par. ad an.* 1768. veteribus omnibus observationibus, ac recentioribus summo studio collatis inter se invicem, accelerationem annuam medii motus Jovis 0, 1733" constituit, eamque augeri dixit in duplicata ratione temporum.

Singularis hujusce phaenomeni rationem aliquam physicam primus omnium afferre voluit Cassinius (*lo. cita.*); & cum in plurimis orbitarum locis Jovis, & Saturni vires supputasset, deprehendisse sibi visus est, velocitatem projectionis Jovis a Saturno augeri semper, & velocitatem Saturni ab Jove imminui. Quod quidem si verum esset, dilatari potius deberet orbita Jovis, & periodicum Jovis tempus augeri, & contra imminui tempus periodicum Saturni.

Tertia Lunae inaequalitas *Variatio* dicitur, eamque immortalis Tycho-Braheus detexit, ac primus omnium ſupputavit.

Inaequalitatum harum quantitates, leges, ac correctiones Newtonus primum accuratioribus obſervationibus definire, & partim ex theoria gravitatis derivare coepit.

Ptolemaeus inter ſe comparatis Hypparchi obſervationibus deprehendit, veri, & medii motus Lunae differentiam non eſſe minorem 5°, cum linea apſidum lunaris orbitae lineam a Terra ductam ad Solem interſecat ad angulos rectos; eſſe vero etiam $7^{\circ}\frac{2}{3}$, cum linea eadem apſidum dirigitur ad Solem, adeoque

---

Phaenomenon hoc clariss. Leonardus Eulerus in Opuſculo *De Relaxatione motus Planetarum* ex aetherei fluidi reſiſtentia explicare conatus eſt, ſed minus feliciter. Quod cum anno 1760. Parisien. Academia praemio propoſito explicandum obtuliſſet, & inquiſiſſet, ſi quae haberentur mediorum motuum Planetarum variationes, & qua ex cauſſa oriri poſſent, Carolus Eulerus in Diſſertatione, quae praemium obtinuit, poſtquam inveſtigasset potiſſimum, quae eſſe potuerint variationes medii motus Terrae ob vim Cometae, qui an. 1759. apparuit, animadvertit, perturbationes motus Planetarum in orbitis ellipticis ſerie quadam exprimi, cujus nonnulli termini continent ſinum diſtantiae aphelii duarum orbitarum, ac ſemper creſcunt, vel decreſcunt; addiditquae etiam variationes inde ortas axis transverſi, & periodici temporis pendere ab excentricitate utriusque orbi-

que mediocrem Aequationem Centri constituit Ptolemaeus $6^{\circ}\frac{1}{3}$, & Evectionem Lunae $1^{\circ}\frac{1}{3}$ addendam, cum Luna simul in quadraturis Solis, & lineae apsidum reperitur, detrahendam vero, cum novilunium, & plenilunium in quadraturis apsidum contingunt. Keplerus, & Horroxius censuerunt, Evectionem ex variabilitate excentricitatis lunaris orbitae oriri, quam hypothesim Newtonus in in scholio theoriae lunaris explicandis omnibus observationibus accommodavit.

Lunae Variationis quantitatem ad 39' usque, ac 40' adscendere censuit Tycho-Braheus. Quae quidem quantitas ab ea non multum abludit, quam ex Newtoni theoria statuit Gregorius in Pro. xxxix. Li. iv. Astr.

---

tae, ac fieri maximas, cum binae apsidum lineae se intersecant ad angulos rectos. In quibus vero orbitis, & quibus quantitatibus axis transversus; & periodicum tempus augeatur, vel imminuatur; num inde oriantur aequationes periodicorum temporum Saturni, & Jovis minime indicavit.

Generalem vero totius phaenomeni explicationem protulit Paullus Frisius in Diss. quam eodem anno ad praemii honorem accessisse Par. Academia judicavit. Positis enim, ut modo sunt, apsidibus Saturni, & Jovis, ostendit reciproca Planetarum actione eorum mediam velocitatem immutari; ac prioribus seierum terminis supputatis, invenit, periodicorum temporum variationes inde ortas satis esse sensibiles, ac generatim monuit, qua positione apsidum, & orbitarum Planetae cujusvis inferioris, vel superioris motus medius augeri, vel minui debeat.

Aſtr. Phy. &c. Haec autem inaequalitas ex angulari Lunae, & Solis diſtantia pendet.

Newtonus in laudato ſcholio aliam attigit lunaris theoriae inaequalitatem, quam *Secundam Centri Aequationem* appellavit; cui additam aliam *Semeſtrem* dixit, eo quod pendeat ex angulo duplae diſtantiae apogaei lunaris a Sole, ita quidem ut ſit maxima aequatio cum apogaeum Lunae verſatur in octante cum Sole, & nulla cum apogaeum ad quadraturas Solis, vel ad ſyzigias defertur, addaturque eadem motui medio in tranſitu apogeai Lunae a Solis quadratura ad ſyzigias, & ſubducatur in reditu a ſyzigia ad quadraturam.

Alia etiam apud Newtonum aequatio occurrit, quae ab excentricitate lunaris orbitae non pendet; ſed habet pro argumento duplam diſtantiam Lunae a linea nodorum, dempta dupla diſtantia Lunae a Sole.

Has, aliasque minores lunaris motus aequationes corrigere, Newtono facem praeferente, ſtuduerunt Eulerus, Alembertius, Clairautius, Mayerus in primis, Simpſonius, Melander, Riccatus, Friſius, aliique ſummi Viri, qui lunarem theoriam ex legibus gravitatis eruendam ſibi aſſumpſerunt. Quorum ſi veſtigiis inhaerentes eas omnes aequationes definiendas ſuſciperemus difficillimum profecto, ac nimis longum opus aggrederemur. Quamobrem pauca tantummodo de Perturbatricibus Solis Viribus proferre ſtatuimus.

LXXVII.

LXXVII. Data itaque Solis, & Lunae diſtantia a Terra, & a ſe invicem Perturbatrices Solis Vires exquirantur, neglecta in praeſens lunaris orbitae ad eclipticam inclinatione.

Sint (*fig.* 9.) T, L, S loca Telluris, Lunae, ac Solis inter ſe conjuncta lineis TL, LS, ST ſyzigiarum linea, ad quam agatur ex L perpendicularis LM, & ex S normalis SK ad TL productam. Sit DT quadraturarum linea, & fiat Terrae maſſa $= M$; Solis vero $= 1$. Gravitas Lunae in Solem erit $\frac{1}{SL^2}$ (n. XXXI.); quae vis cum ex L dirigatur ad S in duas ſecundum LK, KS reſolvi poterit.

Quarum prima ipſi LT contraria gravitatem Lunae in Terram imminuet, altera Lunae motum vectori radio perpendicularem accelerabit, aut retardabit.

Jam vero ob triangulum TKS ſimile TML erit $TK = \frac{TM.TS}{TL}$; unde $LK = TK - TL = \frac{TM.TS}{TL} - TL$, ideoque $\frac{LK}{SL^3} = \frac{TM.ST}{TL.SL^3} - \frac{TL}{SL^3}$ prima vis.

Si modo vim TS, qua Tellus in Solem trahitur, in duas TK, KS reſolvatur, erit $TK = \frac{TM.ST}{TL}$, ut ſupra, & $\frac{TK}{ST^3} = \frac{TM}{TL.ST^2}$. Haec autem vis Terram verſus Lunam impellit, cum agat ſecundum TL. Ergo prima vis omnis, qua Luna Solis actione a Terra

di-

distrahetur, erit $= \frac{LK}{SL^3} - \frac{TK}{ST^3} = \frac{ST.TM - TL^2}{TL.SL^3} - \frac{TM}{TL.ST^2}$.

Considerantibus autem vim, quae perpendiculariter ad radium vectorem dirigitur, pari ratione eruitur $SK = \frac{ST.LM}{TL}$, & $\frac{SK}{SL^3} = \frac{ST.LM}{TL.SL^3}$, & $\frac{SK}{ST^3} = ..$ $\frac{LM}{TL.ST^2}$, ideoque altera vis, qua Luna a Tellure distrahetur, erit $\frac{ST.LM}{TL.SL^3} - \frac{LM}{TL.ST^2}$.

Sit modo $TS = z$, $TM = b$, $LM = c$, $SL = g$, $TL = x$, prima vis erit $\frac{bz - x^2}{g^3 x} - \frac{b}{z^2 x}$, altera vero $\frac{c}{x}\left(\frac{z}{g^3} - \frac{1}{z^2}\right)$. Et quoniam $g^2 = z^2 + x^2 - 2bz$, erit prima vis $\frac{bz - x^2}{x(z^2 + x^2 - 2bz)^{\frac{3}{2}}} - \frac{b}{z^2 x}$; altera $\frac{c}{x}\left(\frac{z}{(z^2 + x^2 - 2bz)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{z^2}\right)$.

Sed in Newtoniana serie $(P + PQ)^{\frac{m}{n}}$ si fiat $m = 3$, $n = 2$, $P = z^2$, $Q = \frac{x^2}{z^2} - \frac{2b}{z}$, est $\frac{1}{(z^2 + x^2 - 2bz)^{\frac{3}{2}}}$ $= \frac{1}{z^3} + \frac{3b}{z^4} - \frac{3x^2}{2z^5} + \frac{15b^2}{2z^5}$, neglectis aliis terminis. Ergo prima vis est $\left(\frac{bz - x^2}{x}\right)\left(\frac{1}{z^3} + \frac{3b}{z^4} - \frac{3x^2}{2z^5} + \frac{15b^2}{2z^5}\right) - \frac{b}{z^2 x} = -\frac{x}{z^3} + \frac{3b^2}{z^3 x} - \frac{9bx}{2z^4} + \frac{15b^3}{2z^4 x}$, neglectis terminis per z^5 divisis. Sed facto angulo $LTS = d$, $\frac{b}{x} = cos.\, d$,

& $\cos.^2 d = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2\, d$, $\cos.^3 d = \frac{1}{4} \cos. 3\, d + \frac{3}{4} \cos. d$.
Ergo fiet prima vis $= -\frac{x}{z^3} + \frac{3x}{z^3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2\, d \right) - \frac{9x^2}{2z^4} \cos. d + \frac{15x^2}{2z^4} \left(\frac{1}{4} \cos. 3\, d + \frac{3}{4} \cos. d \right) = \frac{x}{2z^3} + \ldots \frac{3x}{2z^3} \cos. 2\, d + \frac{9x^2}{8z^4} \cos. d + \frac{15x^2}{8z^4} \cos. 3\, d$.

Simili calculo eruitur altera vis $\frac{c}{x} \left(\frac{z}{z^3} + \frac{3bz}{z^4} - \ldots \frac{3x^2 z}{2z^3} + \frac{15b^2 z}{2z^5} - \frac{1}{z^2} \right) = \frac{c}{x} \left(\frac{3b}{z^3} - \frac{3x^2}{2z^4} + \frac{15b^2}{2z^4} \right) =$ (ob $c =$ $\sin. d$) $\frac{3x}{z^3} \cos. d \sin. d - \frac{3x^2}{2z^4} \sin. d + \frac{15x^2}{2z^4} \cos.^2 d \sin. d = \frac{3x}{2z^3} \sin. 2\, d + \frac{3x^2}{8z^4} \sin. d + \frac{15x^2}{8z^4} \sin. 3\, d$.

LXXVIII. Patet ergo, vim perpendicularem radio, quae priori hujus feriei termino praecipue exprimitur, in octantibus quadraturarum fieri maximam, ac in tranfitu a priori quadratura ad fyzigiam continue Lunam accelerare debere, ut in progreffu ad quadraturarum alteram contrariis gradibus retardat. Deinde in quadraturis pofito $\cos. 2\, d = -1$, gravitas Lunae in centrum augebitur vi $\frac{x}{z^3}$; in fyzigiis autem ob $\cos. d = 1$, minuetur vi $= -\frac{2x}{z^3}$.

LXXIX. Quod fi requiratur ratio vis perturbatricis $\frac{x}{z^3}$ ad vim $\frac{1}{z^2}$, quae a Sole S exercetur in Terram T, evidens eft, eam effe $x : z$. Generatim vero, fi

si dum corpus L revolvitur circa T periodico tempore $= n$, T circa S revolvatur tempore $= 1$, & orbitae sint proxime circulares, gravitas T versus S erit ad gravitatem L versus T, ut $z\,n^{2} : x$, cum ex centralium virium doctrina constet, vires centripetas in circulis esse inter se in composita ratione ex simplici directa radiorum, ac reciproca duplicata temporum periodicorum.

Quare, compositis rationibus, vis perturbatrix $\frac{x}{z^{3}}$ in mediocri distantia erit ad vim $\frac{M}{x^{2}}$ gravitatis Lunae versus T, ut $n^{2} : 1$. Et si gravitas in eadem media distantia loco unitatis assumatur, generatim erit vis perturbatrix $\frac{x}{z^{3}} = n^{2} x$, & vis omnis residua corporis L in T erit $= \frac{1}{x^{2}} - \frac{1}{2} n^{2} x + \frac{3}{2} n^{2} x \cos. 2d$ &c.

LXXX. Quoniam vero tempus periodicum Lunae circa Terram est 27 di. 7 h. 43', Terrae autem circa Solem 365 d. 6 h. 9', erit $1 : n^{2} :: 178725 : 1000$ satis proxime; & gravitas Lunae versus Terram erit in mediocri distantia ad vim perturbatricem $\frac{x}{z^{3}}$, ut ... 178, 725 : 1. Prior autem vis variabitur in ratione reciproca duplicata, altera in directa simplici distantiae. Eadem vero ratio mediocris vis gravitatis ad mediocrem vim perturbatricem locum habet, si orbitae sint circulares, non secus ac si sint Ellipticae. Superius e-

 nim

nim vidimus (n. XLIV.) tempora periodica in ellipsibus eadem esse, quae in circulis mediarum distantiarum intervallo descriptis.

LXXXI. Sed lunaris orbitae ad eclipticam inclinatio, nodorum locus, variusque Telluris situs in orbita sua variationes quasdam in superius inventis viribus producere debent, quas omnes investigare operae pretium erit. Itaque ut ab iis, quae ex inclinatione lunaris orbitae ad eclipticam, & nodorum loco pendent, initium fiat, sit $L\,l$ intersectio lunaris orbitae $L\,A\,l$ cum plano eclipticae $L\,a\,l$, positisque omnibus, ut antea (n. LXXVII.), vis perturbatrix Solis in directione radii vectoris, erit $-\frac{x}{z^3}+\frac{3\,b^2}{z^3\,x}-\frac{9\,b\,x}{2\,z^4}+\frac{15\,b^3}{2\,z^4\,x}$, seu neglectis duobus ultimis terminis, $-\frac{x}{z^3}+\frac{3\,b^2}{z^3\,x}$. Sit $A\,a$ ex puncto A in planum eclipticae $L\,a\,l$ perpendiculariter demissa, eritque $TA^2 = Ta^2 + Aa^2$. Agatur ex L' normalis $L'N = b$ ad $D\,d$ quadraturarum lineam, & ex A normalis $AG = q$ ad lineam $L\,l$ intersectionis, factaque $1:\pi$ ratione radii ad sinum inclinationis orbitae lunaris, habebitur $Aa = \pi . AG$. Sed posito angulo, quem linea AT cum linea intersectionis constituit, hoc est $ATL = m$, $q = TA\ \textit{sin.}\ m = \pi\ \textit{sin.}\ m$. Ergo $Aa = \pi\, x\ \textit{sin.}\ m$.

Jam vero TA in orbita lunari est ad Ta in ecliptica, ut $L'N$ in orbita lunari ad rectam, quae intercipitur puncto N, & normali ex L' demissa in

planum

planum $L a l$ id est $CA : Ta :: b : b$. Et quoniam $TA = x$, $Ta = \sqrt{(TA^2 - Aa^2)} = \sqrt{(x^2 - \pi^2 x^2 \sin.^2 m)}$, erit $b = \frac{h\sqrt{(x^2 - \pi^2 x^2 \sin.^2 m)}}{x} = b\sqrt{(1 - \pi^2 \sin.^2 m)}$. Superior ergo vis expressio evadet in hypothesi inclinationis lunaris orbitae $-\frac{x}{z^3} + \frac{3h^2}{z^3 x}(1 - \pi^2 \sin.^2 m)$. Sed facto angulo $STL' = d'$, $b^2 = x^2 \cos.^2 d'$, & $\cos.^2 d' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 2d'$. Ergo vis fiet $-\frac{x}{z^3} + \frac{3x}{z^3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 2d')(1 - \pi^2 \sin.^2 m)$. Sed $\sin.^2 m = \cos.^2 m - \cos. 2m$, & $\cos.^2 m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 2m$. Ergo vis erit $-\frac{x}{z^3} + \frac{3x}{z^3}(\frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{2}\cos. 2d')(1 - \frac{\pi^2 + \pi^2 \cos. 2m}{2}) = -\frac{x}{z^3} + (\frac{3x}{2z^3}\cos. 2d' + \frac{3x}{2z^3})(1 - \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2 \cos. 2m) = -\frac{2x}{2z^3} + \frac{3x}{2z^3} - \ldots \frac{3\pi x}{4z^3}\cos. 2m + \frac{3x}{2z^3}\cos. 2d' - \frac{3\pi^2 x}{4z^3}\cos.^2 d' + \ldots\ldots \frac{3\pi^2 x}{4z^3}\cos. 2d' \cos. 2m = \frac{x}{2z^3}(1 - \frac{3\pi^2}{2} + \frac{3\pi^2}{2}\cos. 2m) + \frac{3x}{2z^3}\cos. 2d'(1 - \frac{\pi^2}{2}) + \frac{3\pi^2 x}{4z^3}\cos. 2d' \cos. 2m$.

Simili modo vis perpendicularis radio vectori, quae numero LXXVII. inventa est $\frac{c}{x}(\frac{3b^2}{z^3} - \frac{3x^2}{2z^4} + \frac{15b^2}{2z^4})$ reducetur, facta $L'M = c'$, ad $\frac{3bc'}{z^3 x}$; & quoniam $c' = \ldots x \sin. d'$, si substituantur valores c', b, fiet $\ldots\ldots \frac{3x}{2z^3}\sin. 2d'(1 - \frac{\pi^2}{2}) + \frac{3\pi^2 x}{4z^3}\sin. 2d' \cos. 2m$.

LXXXII.

LXXXII. Superſunt modo exquirendae variationes earumdem virium, quae pendent ex loco Terrae in orbita ſua. Ad quod obſervandum eſt, ſi a mediam diſtantiam Telluris a Sole deſignet, & ſit a major ſemiaxis terreſtris orbitae, ac ad excentricitatem ſe habeat ut $1:e$, & ſit TSs angularis diſtantia Terrae a ſumma apſide $= v$, futuram esse veram Telluris a Sole diſtantiam $TS = z = \frac{a(1-e^2)}{1-e\,cos.\,v}$ (n. LIV.), & $\frac{1}{z^3} = ..$ $\frac{(1-e\,cos.v)^3}{z^3(1-e)^3}$, neglectiſque minoribus fractionibus $\frac{1}{z^3} =$ $\frac{1}{z^3}(1-3\,e\,cos.\,v)$, unde $\frac{1}{z^4} = \frac{1}{z^4}(1-4\,e\,cos.\,v)$.

Hoc poſito, & retentis omnibus, quae in numeris LXXIX., LXXX indicata ſunt, ſi ratio temporum periodicorum Terrae circa Solem, & Lunae circa Terram ſit $1:n$, & ſi inſuper gravitas Lunae in Terram $\frac{M}{TL^2}$ in mediocri diſtantia accipiatur loco unitatis, ſcribendo $n^2(1-3\,e\,cos.\,v.)$ loco $\frac{1}{z^3}$, & $\frac{n^2}{z}(1-4\,e\,cos.\,v)$ loco $\frac{1}{z^4}$, in ſuperioris numeri formulis fiet vis perturbatrix Solis ſecundum vectorem radium lunaris orbitae exercita $\frac{n^2x}{2}(1-\frac{3\pi^2}{2})(1-3\,e\,cos.\,v) + ..$ $\frac{3n^2x}{2}(1-\frac{\pi^2}{2})(1-3\,e\,cos.\,v)\,cos.\,2.\,d + \frac{9n^2x^2}{8z}(1-4\,e\,cos.\,v)\,cos.\,d + \frac{15n^2x^2}{8z}\,cos.\,3\,d + \frac{3n^2}{4}\pi^2x\,cos.\,2\,m$

$+$.

$+ \frac{3}{4} n^2 \pi^2 x \cos. 2m \cos. 2d$. Simili modo eruetur vis perpendicularis radio $\frac{3}{2} n^2 x (1 - \frac{1}{2} \pi^2)(1 - 3 e \cos. v) \times \sin. 2d + \frac{3 n^2 x^2}{8 z} (1 - 4 e \cos. v) \sin. d + \frac{15 n^2 x^2}{8 z} \times \sin. 3d + \frac{3}{4} n^2 \pi^2 x \sin. 2d \cos. 2m$.

LXXXIII. Ex priori formula superioris numeri manifestum est, gravitatem Lunae in Terram actione Solis imminui quantitate $\frac{n^2 x}{2} (1 - \frac{3 \pi^2}{2})$, seu proxime $\frac{n^2}{2}$, quae cum ex Terrae loco in sua orbita non pendeat Media Vis Perturbatrix appellari potest.

Ex hac autem, aliisque perturbationibus (quas omnes exquirere instituti nostri ratio non postulat) variationes quasdam in Lunae motu exoriri debere per se paret. Hae vero sunt celeberrimae illae lunaris motus inaequalitates, quibus corrigendis adeo insudarunt Astronomi. Quas omnes si altius investigare colliberet, eo res perduci posset, ut ex Newtoniano Systemate necessario profluere debere severiori calculo demonstraretur. Quod quidem eam, quam de Mundi Systemate doctrinam statuimus validissime confirmaret. Sed salebrosam provinciam a limine, ut ita dicam, salurasse satis sit, ac potius novum Systemati nostro robur ex consideratione praestantissimi in tota coelesti Physica phaenomeni, Aequinoctiorum Praecessionis, comparetur.

LXXXIII.

LXXXIV. Vetus observatio est jam usque a remotissimis ducta temporibus, eaque (45) & Hipparchi, & Astronomorum omnium firmata consensu, aequatoris axem, circa axem eclipticae duas conicas superficies sibi invicem in centro obversas describere, & aequatoris polum, circa polum eclipticae annis singulis ab Oriente in Occidentem 50", 3 promoveri. Ex quo fit, ut stellae fixae in circulis eclipticae parallelis contrario ordine (n. LXII.) 50", 3 singulis annis progredi; longitudinem, quae a primo Arietis puncto supputatur, majorem semper acquirere, integramque revolutionis periodum 25663 annorum, ac 4 circiter mensium spatio absolvere videantur. Qui quidem motus, cum ex eo Sol ad aequinoctialia puncta citius reverti videatur, quam si eadem semper maneret eclipticae, & aequatoris intersectio, *Aequinoctiorum Praecessio* nuncupatur, & post demonstratam a Copernico, ac Newtono Solis, ac fixarum quietem, unanimi Philosophorum consensione Telluris axi tribuitur.

LXXXV. Alium terrestris axeos motum, quo is magis modo, modo minus ad eclipticam inclinatur, & inde quamdam apparentis fixarum motus aequationem

(45) V. *Bailly Hist. de l'Astr. Anc. De la Lande Astr. Fris. C. Ph.* unde hujusce phaenomeni historiam desumpsimus.

nem Bradleyus detexit, quam *Nutationem Poli*, *&* *Axeos Terrae* nuncupatam ad 9" usque circuli maximi quandoque assurgere invenit, & eamdem periodum habere, qua revolutio nodorum lunaris orbitae in plano eclipticae absolvitur, annorum scilicet 18, & 7 mensium. Quam Nutationis periodum a Bradleyo detectam ad 2" exactissimam Machinius postea, & Alembertius demonstrarunt.

Machinius vero indicavit qua hypothesi intra 2" satisfieri possit legibus, ac variationibus omnibus phaenomeni. Centro P (*fig.* 10.), qui sit locus medius poli aequatoris, & radio A P, qui exaequet 9" circuli unius maximi describatur circulus A D C' B, intelligaturque is a vero aequatoris polo describi motu retrogrado, & regressioni nodorum lunaris orbitae sic analogo, ut si P ♋ sit colurus solstitiorum, P ♈ vero colurus aequinoctiorum, aequatoris polus sit in A, quando nodus adscendens lunaris orbitae reperitur in primis Arietis ♈ punctis, ac deinde in B sit polus, quando ad prima Capricorni ♑ puncta nodus pervenit; atque ita ille ad C', & D transeat, dum hic fertur ad prima Librae ♎, & Cancri ♋ puncta.

Bradleyus autem ad Macclesfieldum scripsit, 1° Observationibus accuratius satisfieri, si circulo A B C' D substituatur ellipsis, cujus major axis A C' in plano coluri solstitiorum jaceat, & sit 18" circuli unius maximi; alter vero axis B D in plano coluri aequinoctio-

rum positus, sit tantum 16". 2°. Hanc autem Nutationem 18" cum aequatione quadam Praecessionis Aequinoctiorum conjungi.

LXXXVI. Cum reciprocae gravitatis vis omnibus inhaereat meteriae particulis, eoque vehementius agat, quo particulae propiores sunt, non eadem profecto vi omnes Terrae particulae in Solem, ac Lunam gravitare possunt; sed quae sub aequatore elatiores sunt vividiori attractione affici debent. Qua quidem ex inaequalitate attractionis superioribus numeris descriptum motum terrestris axeos oriri posse, nullus tam rudis est, qui non intelligat. Hanc autem Aequinoctiorum Praecessionis motus caussam esse evidenter constabit, cum severiori calculo demonstraverimus in hypothesi homogeneae Telluris perturbatricibus viribus Solis, ac Lunae quemdam terrestris axeos motum gigni debere, qui ab eo parum abludat, & exiguam eam differentiam inde potissimum pendere censendam esse, quod terrestris massa eterogenea sit.

Nutationem autem terrestris axeos, & ideo Aequinoctiorum Praecessionis aequationem Lunae attractioni potissimum tribuendam esse ex ejusdem periodo luculenter patet, & ex iis, quae in posterum dicturi sumus vel luculentius etiam patebit.

LXXXVII. Newtonus primus omnium (46) Nutatione

(46) V. *Fri. l. c.*

tione non adhuc detecta, Aequinoctiorum Praecessionem ex physicis caussis explicare aggressus est, ac ex attractionibus Lunae, & Solis in Terram, quas ex phaenomenis Marini Aestus supputaverat. Cum enim in Prop. xxx. libri III. Principiorum motum horarium nodorum Lunae in circulari orbita calculo invenisset, collegit inde, qui futurus esset motus medius nodorum Lunae alterius, quae in ipso aequatoris terrestris plano, eodemque periodico tempore simul cum Terra circa centrum revolvi intelligatur. Omnia huc redeunt, quod si $1 : n$ sit ratio temporum diurnae, & annuae revolutionis Terrae, & sinus inclinationis aequatoris ad planum eclipticae vocetur π, esset $\frac{3}{4n} \sqrt{(1-\pi^2)}\, 360^\circ$ motus annuus nodorum Lunae alicujus fictitiae in ipso aequatoris plano diebus singulis revolutae. Deinde hypothesеos loco assumpsit Newtonus, quod si plures Lunae in eodem plano aequatoris, eodemque periodico tempore circa Terram revolverentur, singillatim acceptae singulae, aut simul junctae ad annulum solidum componendum circa aequatorem, eumdem adhuc haberent medium, & annuum nodorum motum; quodque adeo, si materies omnis, quae in Terra extra inscriptam sphoeram redundat ad annulum solidum reduceretur aequatori ipsius sphoerae circumpositum, & diutno motu circumvolutum, adhuc motus nodorum annuus esset $\frac{3}{4n} (\sqrt{1-\pi^2})\, 360^\circ$.

 Qui-

Quibus omnibus positis, demonstravit, perturbatrices vires a Sole in exteriorem Terram exercitas esse ad vires, quae in eamdem agerent, si tota in annulum illum solidum facesseret, ut 2:5. Unde, cum motus omnis nodorum imminui debeat in eadem ratione virium perturbaticium, esset $\frac{3}{10n} \sqrt{(1-\pi^2)} \times 360^\circ$ motus annuus nodorum, sive annua Aequinoctiorum Praecessio, quae ob vires Solis, in exteriorem Terram exercitas gigni posset; & si inclinatio eclipticae, & aequatoris assumatur $23^\circ, 28\frac{1}{3}'$, & $\sqrt{(1-\pi^2)} = 0,91725$, ac fiat $n = 365\frac{1}{4}$, esset motus omnis hujusmodi $976\frac{3}{5}''$,

At cum a Terra exteriori ad sphoeram inscriptam motus transire debeat, & tanto minor in Terra eadem superesse, ut investigaret Newtonus, qua nam ratione distributio omnis fieret, alterius hypotheseos loco assumpsit; quantitatem absolutam motus sic conservari, ut qui exterioris Terrae antea erat, communicatione facta, totus supersit in tota Terra. Deinde ostendit, quantitatem motus sphoerae esse ad quantitatem motus annuli alicujus positi circa aequatorem, & circa aliquam aequatoris diametrum simul cum sphoera revoluti, ut quantitas materiae in sphoera ad quantitatem materiae in annulo, & tria quadrata ex quarta peripheriae parte ad duo quadrata ex diametro conjunctim.

Et quidem cum radius circuli ad peripheriam se habeat, ut $1 : p :: 50000 : 314159$, erit ratio trium quadra-

dratorum ex quarta peripheriae parte ad duo quadrata ex diametro, ſive $\frac{3p^2}{16} : 8 = 925274 : 1000000$. Et, ſi in Terra ſphoeroidica axis minor, qui per polos tranſit dicatur b, & aequatoris radius a, & ſit $a:b::231:230$, in hypotheſi ſcilicet homogeneitatis Terrae, erit quantitas materiae totius terreſtris ad quantitatem materiae in ſphoera inſcripta, ut $a^2:b^2$, & quantitas materiae in ſphoera ipſa erit ad quantitatem materiae exterius redundantis, ut $b^2:a^2-b^2::52900:461$. Itaque compoſitis rationibus, erit quantitas motus ſphoerae ad quantitatem motus annuli, ut 106, 17 : 1, & ſumma quantitatum motus annuli, & ſphoerae erit ad quantitatem motus unius annuli, ut 107, 17 : 1. Et ſi quantitas motus totius Terrae eadem eſſe debeat, quae in Terra exterius ad modum annuli redundantis ob vires perturbatrices Solis gigneretur, minuendo 976 ½" in ratione 1 : 107, 17; annua Aequinoctiorum Praeceſſio vi Solis genita evaderet 9", 7‴ circiter, ita ut 40", 52‴ circiter ea ſit, quae Lunae actioni ſupereſt tribuenda.

LXXXVIII. Tali methodo problematis in univerſa Aſtronomia difficillimi ſolutionem Newtonus tentavit ingenioſe profecto magis, quam accurate. Nam (ut ea praetereamus neceſſaria hujuſce ſolutionis elementa, quae a Newtono ignorari debuerant, utpote quae poſt eum detecta ſint) alia in corporibus libere

ſibi

ſibi occurentibus, alia in corporibus ſimul rotantibus, aut oſcillantibus lex eſt, ut cum ea ante, & poſt ictum eamdem quantitatem motus tueantur, haec eamdem ſemper tueantur quantitatem momentorum.

Et quidem ad primum quod attinet, notum eſt ex Mechanicae elementis, quantitatem motus aequari producto maſſae M in celeritatem C; formulas autem celeritatum corporum poſt ictum eſſe $C' = C - \ldots \frac{nm(C \mp c)}{M+m}$, $c' = \frac{nM[C \mp c]}{M+m} \pm c$; ideoque quantitates motuum poſt ictum erunt $MC' = \ldots \frac{M^2C + MmC - nMmC \pm nMmc}{M+m}$, $mc' = \ldots \frac{nmMC \mp nmMc \pm mMc \pm mc}{M+m}$. Quae duae aequationes ſimul additae fiunt $MC' + mc' = MC \pm mc$. Ergo poſt ictum eadem habetur in corporibus motus quantitas, ut ante ictum ſi corpora libere, ac directe ſibi occurrant.

Jam vero corpus m alligatum inflexibili virga $AN = a$ (*fig.* 11) oſcillando agat in motum corpus μ eidem virgae alligatum ad diſtantiam $AM = b$ a puncto ſuſpenſionis. Sit C celeritas primitiva ipſius m, c vero celeritas ea, quam contra μ agens amiſit. Ergo corpus m movebitur celeritate $C - c$. Actio autem corporis m contra μ non modo conſtat ex ejus maſſa m, & celeritate c, ſed in ejus aeſtimatione comprehendi etiam debet diſtantia a; ideoque vis erit $= acm$, eademque ratione reactio corporis μ conſtabit ex ejus

maſſa

massa μ, celeritate z, & distantia b, eritque $= b \mu z$. Sed cum actioni aequalis reactio sit, erit $b \mu z = a c m$, & celeritas, qua movebitur corpus μ erit $z = \frac{a c m}{b \mu}$.

Sed corpora m, μ eodem tempore T describunt arcus NB, MD. Ergo $C - c : \frac{a c m}{b \mu} :: \frac{NB}{T} : \frac{MD}{T} ::$ NB: MD$:: a : b$, ut constat ex Mechanicae, & Geometriae elementis. Ergo $b (C - c) = \frac{a^2 c m}{b m}$, unde $c = \ldots \frac{C b^2 \mu}{a^2 m + b^2 \mu}$, & demum $C - c = \frac{C a^2 m}{a^2 m + b^2 \mu}$, & $\frac{a c m}{b \mu} = \frac{a b C m}{a^2 m + b^2 \mu}$.

Quo itaque haberi possint momentorum quantitates in corporibus m, & μ, eorum celeritates $\ldots \frac{C a^2 m}{a^2 m + b^2 \mu}$, $\frac{C a b m}{a^2 m + b^2 \mu}$ multiplicandae sunt per eorum massas m, μ, & distantias a, b. Hae vero si addantur fiet $\frac{C a^3 m^2 + C a b^2 m \mu}{a^2 m + b^2 \mu} = C a m$ momentum ex momentorum utriusque corporis summa conflatum. Sed hoc idem erat momentum ante motus comunicationem ex massa m, celeritate C, & distantia a constans. Ergo momenti quantitas ante, & post comunicationem motus eadem conservatur.

Quare cum momentorum quantitates in Newtoni sphoera, & annulo assumptis iisdem numeris, qui antea, esse debeant, ut 91, 8 : 1, motum omnem

976

976 $\frac{1}{3}$'' minuendo in ratione 1 : 91, 8, fieret 10'', 27''' annuae Praeceſſionis motus, qui ex Solis viribus in Terra oriri poſſet, qui ab eo, quem Newtonus invenerat, ſatis differt.

LXXXIX. In eosdem fere Newtoni numeros recidunt binae Problematis hujuſce ſolutiones, quae in Tranſactionibus Philoſophicis prodierunt altera a Sylvabellio an. 1754, altera biennio poſt a D. Walmeſleyo exhibita. Quo quidem anno in Diſſertatione de motu diurno Terrae, quae a R. Berolinenſi Academia praemium obtinuit, Newtoni hypotheſes, & methodum ad Praeceſſionis; & Nutationis phaenomena traduxit Paullus Friſius, qui aliquot poſt annos, aliis editis operibus pulcherrimam hanc Phyſicae coeleſtis partem diffuſius exornandam reaſſumere voluit.

LXXXX. Non eadem methodo ad veram Problematis ſolutionem pervenit Simpſonius (47), quem nimis fortaſſe acriter ſuis in Mathematicis Opuſculis carpſit Alembertius, qui vel ab anno 1749 praeſtantiſſimo edito opere (48) accuratiſſimam, ac generalem Problematis ejusdem ſolutionem exhibuerat. Quae quidem ſolutio cum prae ceteris excellentiſſima ſit, quanam methodo a ſagaciſſimo Geometra abſoluta fuerit indigitare operae pretium erit.

XCI.

(47) *Miscellaneous Tract.* 1757.

(48) *Réchèrches ſur la Prècess. des Equinoxes &c.*

XCI. Cum itaque elegantiſſimo calculo ad binas reduxiſſet perturbatrices vires omnes, quae a Sole, & Luna in ſingulas terreſtris ſphoeroidis particulas exercentur (49), qui inde gigni debeat effectus perpendendum aggreſſus eſt.

In aureo illo, quem anno 1743 publici juris fecerat Dynamicae tractatu, quo Dynamicam in Staticam, ut ita dicam, convertens, ac directam generalemque exhibens Problematum omnium vel reſolvendorum, vel ſaltem ad aequationes reducendorum methodum, ſeſe invicem provocantium Geometrarum aemulationi, & litibus finem impoſuit, demonſtraverat Vir Clariſſimus, quod ut ſingulo quoque tempore dignoſci poſſit motus corporis pluribus agitati viribus, conſiderandus eſt motus, quo anteriori tempore afficiebatur, veluti compoſitus ex quodam motu, qui viribus hiſce deſtruitur, & ex alio, quem reapſe concipere debet corpus, quique ejus naturae futurus eſt, ut corporis particulae omnes ei obtemperent, quin tamen alterae alteris obſint.

Hoc probe conſtituto Telluris motum generatim inquirens Alembertius eam celeritate quacumque circa proprium axem torqueri ſuppoſuit, eodemque tempore axem ipſum quocumque rotationis motu circa

 cen-

(49) *Ibid. c. 1.*

centrum converti. Qua quidem in hypothesi singularum terrestrium particularum motus quocumque tempore considerari debuit, veluti compositus ex tribus aliis motibus, quorum duo paralleli sint ad planum eclipticae, perpendicularis alter. Singuli hujusmodi motus in alium secundo tempore convertuntur, & haberi possunt veluti compositi ex alio hoc motu, & ex altero quodam qui Lunae, ac Solis actione destruitur; quam actionem ad binas vires notae quantitatis, ac directionis eximius Geometra reduxerat. Inquirendae igitur occurrebant aequilibrii leges inter hujusmodi vires, & eas, quas in quavis particula destrui supponendum erat. Quod ut assequeretur Alembertius, generalem exhibuit solutionem (50) problematis, quo aequilibrii leges inter potentias, quae neque in idem planum, neque secundum lineas parallelas agant determinandae offeruntur. Quo quidem enucleato problemate, aliud sibi enucleandum proposuit, quo Tellurem considerans veluti homogeneam sphoeroidem revolutione ellipseos circa proprium axem generatam, axeos sphoeroidis hujusce angularem motum Solis, ac Lunae perturbatricibus viribus producendum exquisivit.

Ex

(50) *Ib. c. 2.*

Ex earum, quae primi problematis solutione exhibitae fuerant aequationum ingeniosa transformatione alterius solutionem deduxit binis aequationibus, eo quod terrestris axeos positio singulis temporibus e duabus pendeat variabilibus, scilicet ex motu, quo circa polos eclipticae circulatim defertur, & ex illius inclinatione ad eclipticae planum juxta ea, quae a Bradleyo potissimum observata sunt (n. LXXXV.).

Sit in *fig.* 12. AG terrestris axis, MN ejusdem projectio in planum eclipticae, quae tantum variari debet, quantum axeos positio in contrariam partem variatur. Sit OT directio vis, qua O versus Solem T trahitur, eique parallela RH directio vis versus Lunam H. Sit S massa Solis L massa Lunae, u' distantia Solis a Tellure, ac fiat $\frac{L}{u'^3} \times \frac{u^3}{S} = 1 + b$, dz arcus a Tellure infinitesimo tempore descriptus, m tangens inclinationis orbitae lunaris $= \frac{1}{11}$, x sinus distantiae loci Lunae in ecliptica a nodo adscendente, b constans indeterminata, v angulus, quem OT cum ON constituit, v' angulus ORH, π angulus, quem Telluris axis cum plano eclipticae constituit, de angulus infinitesimus a linea ON descriptus, a differentia axium Telluris, eruntque Alembertii aequationes $dd\pi = \ldots$

$$\frac{3a \cos.^2 v \sin.\pi \cos.\pi \times dz^2 + 3a\,dz^2 (1+b) \cos.^2 v' \sin.\pi \cos.\pi}{1+3a} -$$

$$\frac{3a\,dz^2 (1+b) m x \cos.v' (1 - 2[\cos.\pi]^2)}{1+3a} - de^2 \sin.\pi \cos.\pi$$

$$+\left(\frac{1+4a}{1+3a}\right) b\, de\, dz \cos.\pi \ldots\ldots B$$

$$\& \ \frac{3a\, d\zeta^2 \sin.2v \cos.^2\pi + 3a(1+b \sin.2v' \cos.^2\pi \times d\zeta^2}{2(1+3a)} -$$

$$\frac{3a(1+b)\, d\zeta^2 \sin.v' \times mx \sin.\pi \cos\pi}{1+3a} = d(de \cos.^2\pi) + \ldots$$

$$\frac{(1+4a)\, d(h\, d\zeta \sin.\pi)}{1+3a} \ldots\ldots D.$$

Ex hàrum aequationum integratione terreſtris axeos motus determinari poteſt. Has itaque ut integraret Alembertius ad commodiorem formam, ſimul & generaliorem reducere ſtuduit. Et primo quidem nulla habita ad Telluris denſitatem ratione, & ejus ſtratorum figuram a ſphoerica non multum abſimilem (quaecumque ea ſit conſiderans) loco a ſubſtituit A, $M-K$ loco $-2a$, K loco $1+4a$, M loco $1+2a$; deinde vero Tellurem homogeneam ſuppoſuit, eaque in hypotheſi oſtendit $M=K$; ideoque $M+K=2K$ quam proxime; ita ut aequationes D, B demum reducerentur ad . . . .

$$\frac{3A\, d\zeta^2 \sin.2v \cos.^2\pi + 3A(1+b)\, d\zeta^2 \sin.2v' \times \cos.^2\pi}{2K} -$$

$$\frac{3A(1+b) \sin.v' \times mx \cos.\pi \sin.\pi \times d\zeta^2}{K} = d(de \cos.^2\pi) +$$

$$d(b\, dz \sin.\pi) \ldots F, \ \& \ dd\pi = \ldots\ldots$$

$$\frac{3A \cos.^2 v . d\zeta^2 \sin.\pi \cos.\pi + 3A \cos.^2 v' . d\zeta^2 . \sin.\pi \cos.\pi \times (1+b)}{K}$$

$$-\frac{3A\, d\zeta^2 (1+b) \cos.v' . mx(1-2\cos.^2\pi)}{K} - de^2 \sin.\pi \cos.\pi$$

$$+ b\, de\, dz \cos.\pi \ldots\ldots G.$$

Qui-

Quibus ita praeconſtitutis ſtatuit, Mz eſſe angulum a projectione axeos Terrae deſcriptum tempore, quo axis angulum z deſcribit, ſi M exprimat conſtantem aequalem quam proxime $\frac{50''}{360^\circ} = \frac{1}{6.12.360}$. Suppoſuit autem, cum $z = o$, diſtantiam Solis a projectione N poli borealis A aequalem eſſe U, indeque deduxit, quod cum Tellus angulum z deſcripſerit, & projectio A angulum Mz in contrariam partem, diſtantia loci Solis a puncto N futura ſit $\overline{U+z+Mz}$.

Jam vero angulus $TOM = v$, ſeu diſtantia Solis a puncto M differt a prima 180°. Ergo $\sin. v = -\sin.\overline{U+z+Mz}$, & $\cos. v = -\cos.\overline{U+z+Mz}$. Pariter dicta n ratione motus angularis Lunae ad motum angularem Telluris, n' ratione motus nodorum Lunae ad motum Terrae (quarum rationum prima eſt $13\frac{1}{3} : 1$, altera $\frac{1}{19} : 1$) invenit $\sin. v' = \overline{U' + nz + Mz}$ & $\cos. v' = -\cos.\overline{U' + nz + Mz}$, facta U' aequali diſtantiae loci Lunae in ecliptica a puncto N, cum $z = o$. Dicta vero g diſtantia loci Lunae in ecliptica a nodo adſcendente, cum $z = o$, obtinuit $x = \sin.\overline{g + nz + n'z}$, ideoque $-x \cos. v' = \frac{\sin.\overline{U' + g + 2nz + n'z + Mz}}{2} + \ldots \frac{\sin.\overline{-U' + g + n'z - Mz}}{2}$, & $-x \sin. v' = - \ldots \frac{\cos.\overline{U' + g + 2nz + n'z + Mz} + \cos.\overline{g - U' + n'z - Mz}}{2}$.
Demum ex doctrina Sinuum $\cos.^2 v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 2v$, $\cos.^2 v' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 2v'$.

His

His itaque valoribus in ſuperioribus aequationibus F, G ſubſtituendis inventis, eas integrandas ſuſcepit Alembertius (51). Quo autem id facilius aſſequi poſſet, demonſtravit $b = -365\frac{1}{4}$, & aequationem F, minoribus neglectis terminis, ad hanc reduxit $\frac{3A(1+b)}{2K} \times \frac{m\,dz}{n'-M} \times \frac{-\cos.\pi \sin.\pi \times x \sin.v'}{-365\frac{1}{4}} = d(\sin.\pi)$, in qua loco $-x \sin.v'$ ſubſtituenda erat quantitas $\frac{\cos.g - U' + n'z - Mz}{2}$. Jam vero $g - U'$ eſt diſtantia projectionis poli a nodo adſcendente, cum $z = 0$; U' enim exprimit diſtantiam loci Lunae in ecliptica a projectione poli, g diſtantiam loci Lunae in ecliptica a nodo. Cum itaque ſuppoſuiſſet Alembertius, polum in ♋, cum nodus eſt in ♈, obtinuit $g - U' = 90°$; indeque $\cos.g - U' + n'z - Mz = -\sin.n'z - Mz$. Subſtituendo igitur, & integrando eruit $\sin.\pi = \sin.\varpi - \frac{3Am(1+b)}{2K.365\frac{1}{4}} \times \frac{\sin.\varpi \cos.\varpi \times \cos.n'z - Mz}{n'-M}$, unde $\pi = \varpi - \frac{3Am(1+b)}{2K(365\frac{1}{4})} \times \frac{\sin.\varpi \cos.n'z - Mz}{n'-M}$, ſi ϖ exprimat valorem medium anguli π.

Pari ratione aequationem G reduxit ad $de = -\frac{3A}{2Kh} \times (2+b) \times \sin.\pi \times dz + \frac{3Am(1+b)}{hK\cos.\pi} dz \times x \cos.v'$

$\times$ (1

(51) *Ibid. c.* 4.

$\times (1 - 2 \cos.^2 \pi)$; unde cum loco $1 - 2 \cos.^2 \pi$ ſubſtituiſſet $-\cos. 2 \varpi$, & loco $- x \cos. v'$, $\frac{\cos. n' z - M z}{2}$, obtinuit $e = \frac{3 A (2 + b)}{365 \frac{1}{4} . 2 K} \times z \sin. \varpi - \frac{3 A m \sin. n' z - M z}{(n' - M) . 2 K . 365 \frac{1}{4}}$ $\times \frac{\cos. 2 \varpi}{\cos. \varpi} \times (1 + b)$.

Haec vero difficillimi problematis ſolutio adeo generalis eſt, ut indeterminata fortaſſe videri poſſit. Cum enim actio Solis, & Lunae in Terrae axem ex diſpoſitione, & figura terreſtrium ſtratorum pendeat, primum penitus latet, ad alterum vero quod attinet, nil certi ſtatuit Alembertius. Ut igitur determinati aliquid afferret, animadvertit, annuam 50" Praeceſſionem ex actione Solis, & Lunae conjunctim exoriri; Praeceſſionis autem aequationem (quam cap. VI. invenit), & Nutationem Lunae tantum actioni tribuendam eſſe. Quaecumque vero ſit terreſtrium ſtratorum diſpoſitio, calculo demonſtratur, Nutationis quantitates, & Praeceſſionis annuae eamdem ſemper rationem inter ſe habituras, licet earum abſoluti valores in omnibus hypotheſibus varientur. Comparando igitur quantitatem Nutationis ex obſervationibus erutam, cum quantitate annuae Praeceſſionis ex obſervatione itidem eruta, nulla ad terreſtrium partium diſpoſitionem ratione habita, invenire potuit tum rationem virium Solis, & Lunae, tum Praeceſſionis quantitatem a Luna, & a Sole productam; quod idem & Nos inferius praeſtabimus.

Aliam

Aliam etiam problematis hujusce enucleandi simpliciorem methodum exhibuit Alembertius, qua egregia multa de rotatione corporum proferens ad superiores aequationes diverso longe tramite pervenit.

XCII. Alembertio consenrire videntur Eulerus in Actis Berolinensis Academiae ad an. 1749, & la Grangius in Dissertatione de Libratione Lunae, quae anno 1769 a Parisiensi Academia praemium obtinuit. Auctores hi celeberrimi ex generalibus motus principiis ingeniosa analysi eruerunt, circa quem axem, spectatis Solis, & Lunae viribus, diurna Terrae rotatio absolvi debeat, & datis axis deviationibus, variationes omnes interfectionis, inclinationisque eclipticae, & aequatoris determinarunt. Licet autem earumdem variationum quantitates cum Sylvabellii formulis videantur convenire, & cum iis praesertim, quas Simpsonius, & la Landius exhibuerunt; in hoc tamen potissimum methodi omnes inter se differunt, quod Newtonus, Sylvabellius, Simpsonius, & la Landius putaverint, particulam aequatoris R (*fig.* 13.) diurno motu ex R in M, & Solis, aut Lunae actione ex R latam in N compositis motibus sic ferri in directione R V, ut aequator A R B circa radium F O nutando transeat in locum A N Z B; Eulerus vero, la Grangius, & Alembertius etiam ostenderint compositis simul viribus, ac motibus, novum rotationis axem exsurgere, & ae-

qua-

quatorem novum A N Z B a priore A R B ita diversum esse, ut aliam Terrae sectionem referat.

XCIII. Innumeris profecto cumulandae laudibus tantorum Virorum methodi, quibus nihil excogitari potest exactius. Verum cum rotationis axem ab axe figurae, qui meridianos omnes in duas aequales, similesque partes dividit, sensibiliter non recedere ex ipsa diurni motus, & perturbatricium virium ratione Frisius ostenderit in Cosmographia, & Alembertius ipse in V. Mathematicorum Opusculorum volumine animadverterit, Nos faciliori, breviorique methodo inhaerentes ab ea, quam Alembertius sequutus est recedemus, & difficillimi problematis solutionem ex simplicioribus Dynamicae legibus deducere conabimur, in id potissimum animo intendentes, ut appareat, ex Newtoniano Systemate phaenomenon hoc non modo exactissime explicari posse, sed etiam necessario habendum esse.

XCIV. Cum itaque ex gravitatis legibus (n. LXXXVI.) constet, Solem vi quadam perturbatrice terrestres particulas attrahere, proindeque terrestris axeos situm immutare niti debere; ea vis primum pro quacumque particula determinanda occurrit.

Sit igitur (*fig.* 14) P E p Q terrestris meridianos, P C p Telluris axis, D C perpendicularis ad lineam centrorum C S, qua Telluris, ac Solis centra conjunguntur. Cum Solis actio aequatoris situm im-

murare possit unica differentia attractionis in quamcumque meridiani particulam A exercitae ab ea, quam exercet in centrum C; ut vera habeatur vis perturbatrix, qua Sol particulam A a plano DKC distrahere nititur, vis, quam in C exercet subtrahenda est ab ea, quam exercet in A.

Vis itaque a Sole exercita in A sit V, M autem massa Solis. Erit $V=\frac{M}{SA^2}$, & in duas resolvi poterit secundum AC, CS; quarum prima cum versus centrum dirigatur, nullam gignere potest perturbationem, ideoque negligenda est, & ea solum consideranda, quae secundum CS dirigitur. Quoniam itaque SA, est ad $\frac{M}{SA^2}$, ut CS ad vim secundum eam exercitam, vis secundum CS erit $\frac{M.CS}{AS^3}$, & cum vis Solis in centrum sit $\frac{M}{CS^2}$, perturbatix vis φ erit . . . $M\left(\frac{CS}{SA^3}-\frac{1}{CS^2}\right)$.

Jam vero ob angulum CSA valde exiguum, $SA = CS - AK$, ideoque $\frac{1}{AS^3}=(CS-AK)^{-3}=\frac{1}{CS^3}+\frac{3AK}{CS^4}$ &c., neglectis aliis seriei terminis. Vis igitur $\frac{M.CS}{SA^3}=\frac{M}{CS^2}+\frac{3AK.M}{CS^3}$, & vis $M\left(\frac{CS}{SA^3}-\frac{1}{CS^2}\right)=\frac{M}{CS^2}+\frac{3AK.M}{CS^3}-\frac{M}{CS^2}=\frac{3AK.M}{CS^3}=\varphi$.

Qua

Qua quidem ex formula cum eruatur CS : $\frac{M}{CS^2}$ :: 3 AK : $\frac{3 AK . M}{CS^3}$, patet, vim perturbatricem a Sole exercitam in quamcumque meridiani particulam A proportionalem esse ad distantiam particulae a linea DC perpendiculari ad radium CS.

XCV. Quo vis hujusmodi quantitas exacte determinari possit, M valor in partibus vis centrifugae ad aequatorem terrestrem inquiratur. Ad quod sit (*fig. 6.*) ES circularis arcus aequalis arcui orbitae terrestris, & TV arcus itidem circularis in terrestri aequatore; iique arcus aequalibus temporibus describi intelligantur. Vis, qua Sol in C locatus Tellurem in arcu ES retinet, exprimitur linea EP; linea vero Tr ea vis, qua particula T terrestris aequatoris in loco suo detinetur, non secus ac ejusdem vis centrifuga LV = Tr (n. LVII.); quae omnia constant ex elementari centralium virium doctrina. Fiat TC aequatoris radius $= a$, EC terrestris orbitae radius $= r$, tempus diurnae revolutionis Terrae $= t$, tempus vero periodicum $= T$. Cum vires centripetae, vel centrifugae in circularibus trajectoriis proportionales sint dato tempore arcui per quadratum temporis diviso, erit Tr:EP :: $\frac{TV}{t^2}$: $\frac{ES}{T^2}$ :: $\frac{a}{t^2}$: $\frac{r}{T^2}$. Ergo EP = T$r \times \frac{rt^2}{aT^2}$.

Jam vero si Terrae orbita adeo minueretur, ut aequalis fieret circulo TV, esset EP = T$r \times \frac{r^3 t^2}{a^3 T^2}$ (n.

(n. XXXI.). Hoc autem in casu Solis massa ei, quam exerceret vi proportionalis esset, scilicet, si T r vis centrifuga fiat $= \beta$, $M = \frac{\beta r^3 t^2}{a^3 T^2}$.

Sed in *fig.* 14 $CS = r$. Ergo, si fiat $a = 1$, erit $M = \frac{CS^3 . \beta t^2}{T^2}$, & vis perturbatrix $\varphi = \frac{3 \beta t^2 . AK}{T^2}$.

XCVI. Haec itaque vis φ ipsi A K proportionalis, si A K aequalis evadat aequatoris radio $a = 1$, fiet $\varphi = \frac{3 \beta t^2}{T^2}$. Sed in latitudine nostra $\beta = \frac{1}{289}$ circiter gravitatis terrestrium corporum (n. LXVIII.), $T = 365$, $t = 1$. Ergo $\varphi = \frac{1}{12834000}$ gravitatis terrestrium corporum.

XCVII. Detecta vi perturbatrice, quam Sol in unamquamque Telluris particulam exercere debet, inquirenda superest ea, qua meridiani ellipsis quaecumque, & integra demum terrestris Sphoerois afficietur.

Posito itaque, quod singulae particulae ellipseos A F G M (*fig.* 12.) vi Solis perturbatrice, ut supra (n. XCIV.) trahantur, investigetur summa virium, quae in integram lineam E C diametro O F ordinatam exercebitur. Ad quod prius exquiratur vis in punctum V.

Cum vis proportionalis sit distantiae a plano M N (n. XCIV.), erit $a : \varphi :: OD : \frac{\varphi}{a} . OD$. Vi ergo $\frac{\varphi}{a} . OD$ punctum, seu particula V afficietur.

Sed vis $\frac{\varphi}{a} . OD$ particulae D applicata eam versus D T impelleret, nullum autem in ellipsi gigneret

ret rotationis motum, maximum vero applicata in C (n. n. LVI, LXXIII.). Diſtantia ergo DV tamquam vectis centrorum lineae applicatus conſideranda erit; ideoque, ut verus habeatur perturbatricis vis effectus ad rotationis motum producendum, diſtantia a centrorum linea veluti elementum in calculum erit introducenda. Vera igitur vis in V erit $\frac{\varphi}{a}.OD.DV$, &, ſi fiat $DV = z$, elementum autem $V = dz$, habetur vis in $V = \frac{\varphi}{a} z\,dz.OD$, & integrando $\frac{\varphi z^2}{2a}.OD$ vis in integram DV; & $\frac{\varphi.DC^2}{2a}.OD$ vis in DC, atque $\frac{\varphi.DB^2}{2a}.OD$ vis in integram DB. Quae vis cum in oppoſitam partem conatum gignat, conatuum, ſeu virium differentia in calculo aſſumenda eſt. Erit igitur $\frac{\varphi}{2a}.OD(BD^2 - CD^2) = \frac{\varphi}{2a}.OD(BD + CD) \times (BD - CD) = \frac{\varphi}{2a}.OD.BC.2DE = \frac{\varphi}{a}.OD \times \ldots BC.DE$ integra vis exercita in ordinatam BC ad ellipſim AFGM circa centrum C convertendam.

XCVIII. Inde vero facile dignoſci poteſt, quae in integram ellipſim exercebitur vis ad eumdem motum producendum. Fiat $OF = c$, $OM = p$, $FH = f$, $OH = g$, $OD = y$, $OE = x$. Ex natura ellipſeos $EC^2 = BE^2 = \frac{p^2}{c^2}(c^2 - x^2)$. Ob triangulum autem OFH ſimile ODE, $y = \frac{fx}{c}$, & $ED = \frac{gx}{c}$; ergo $\frac{\varphi}{a}.\frac{2fgpx^2}{c^3} \times$

$\surd(c$

$\sqrt{(c^2 - x^2)}$ fiet ſubſtituendo vis in integram ordinatam ſuperiori numero inventa.

Concipiatur modo alia ordinata infinite proxima ipſi BC, ejuſque diſtantia a BC ſuper OD fiat $= dy = \frac{f dx}{c}$.

Si per dy multiplicetur vis in integram ordinatam BC, habebitur vis in exiguum illud rectangulum velut ellipſeos elementum conſiderandum; quae integrata vim in integram ellipſim exhibebit. Vis in elementum ellipſeos eſt $\frac{\varphi f g}{a c^2} \times \frac{p f x^2 dx}{c^2} \sqrt{(c^2 - x^2)}$. Integrando itaque $\int x^2 dx (c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} x (c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} c^2 \int dx (c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; at ſi fiat $x = c$, $\int x^2 dx (c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} c^2 \int dx (c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; ergo iterum integrando $\int dx (c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = c x - \frac{x^3}{6 c} - \frac{x^5}{40 c^3} - \frac{x^7}{112 c^5}$ &c. $= c^2 (1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112}$ &c.). Si itaque ponatur $\int \frac{2 f p}{c^2} (c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = A$, fiet vis in integram ellipſim $\frac{\varphi f g}{a c^2} \times \frac{A c^2}{4} = \frac{\varphi}{a} \cdot \frac{\text{FH.OH.}A}{4}$.

Jam vero ſi ex O agatur OT ipſi FH parallela, & ex F ordinata FK ſuper axem GA, ac ſit abſciſſa OK $= z$, erit ſubnormalis RK $= \frac{b^2 z}{a^2}$ (n. xv.), unde OR $= z - \frac{b^2 z}{a^2}$, & cum ſit OQ $= \frac{a^2}{z}$, quemadmodum

modum ex conicorum doctrina constat, $OR.OQ = a^2 - b^2$.

In triangulo ORH rectangulo in H, $OR:OH :: 1 : sin. ORH$, seu $cos. HOR$, quem dicimus n; pariterque in altero triangulo rectangulo OTQ, $OQ:OT$, seu $FH :: 1 : sin. AOM = m$. Si itaque in duabus proportionibus $1 : n :: OR:OH$, $1 : m :: QO:FH$ ducatur terminus in terminum, fiet $1 : mn :: OQ.OR = a^2 - b^2 : OH.FH = mn(a^2 - b^2)$.

Ergo substituendo $\frac{A\phi mn(a^2 - b^2)}{4a}$ erit vis perturbatrix actione Solis in integram terrestris Sphoeroidis ellipsim exercita; vis scilicet, qua actione Solis hujusmodi ellipsis Tellurem a polo ad polum convertere niti debet.

XCIX. Quoniam AOG est major ellipseos axis, seu terrestris aequatoris diameter; Solem autem in linea OT agere supponimus, angulus AOT aequalis erit declinationi Solis. Sed $sin. AOH = m$, & $cos. AOH = n$; ergo mn est productum sinus declinationis Solis in ejusdem cosinum.

C. Superest modo determinanda vis perturbatrix Solis in integram terrestrem Sphoeroidem. Detecta autem vi in integram Sphoeroidis ejusdem ellipsim, seu meridianum, nullam disquisitio haec difficultatem exhibet. Si enim alia concipiatur ellipsis huic infinite proxima, earumque distantia dicatur du, ac per du

multi-

multiplicetur vis in integram ellipſim ſuperius inventa, obtinebitur vis in Sphoeroidis elementum, ac integrando vis in integram Sphoeroidem.

Supponamus itaque, terreſtrem Sphoeroidem ſecari plano L M N (*fig.* 14) parallelo ad meridianum Pp, in quo Sol verſatur, ad diſtantiam $CM = u$ a centro C. Sectio ellipſim exhibebit, ejuſque major axis minori L N perpendicularis aequabitur $\sqrt{(a^2 - u^2)}$. Si ergo ellipſeos P E Q ſuperficies dicatur A, erit $a^2 : a^2 - u^2 :: A : \frac{A(a^2 - u^2)}{a^2}$, qua quantitate minoris ellipſeos ſuperficies exprimitur. Vis itaque in integram hanc ellipſim actione Solis exercita cognoſcetur, ſi in formula num. XCVIII. loco A ſubſtituatur $\frac{A(a^2 - u^2)}{a^2}$, & loco $a^2 - b^2$, differentia axium hujus ellipſeos. Cum itaque hujus ellipſeos axium differentia ſit ad differentiam axium ſimilis majoris ellipſeos in ratione ſuperficierum, erit illa $\frac{a^2 - b^2}{a^2}(a^2 - u^2)$. Vis ergo in minorem ellipſim habebitur $\frac{\varphi}{4a^5} . mn(a^2 - b^2)(a^2 - \ldots u^2)^2 . A$, quae ducta in du fit $\frac{\varphi}{4a^5} . mn(a^2 - b^2) \times \ldots (a^4 du - 2a^2 u^2 du + u^4 du)$ vis in elementum Sphoeroidis. Haec autem integrata evadit .... $\frac{A\varphi mn(a^2 - b^2)(a^4 u - \frac{2}{3} a^2 u^3 + \frac{1}{5} u^5)}{4a^5}$ formula, qua vis in omnes dimidiae Sphoeroidis particulas exprimitur,

ſi

si $u = a$, scilicet radio aequatoris. Vis ergo in integram Sphoeroidem erit $\frac{2A\phi mn(a^2-b^2)(a^5-\frac{2}{3}a^5+\frac{1}{5}a^5)}{4a^5}$ $= \frac{4A\phi mn(a^2-b^2)}{15}$.

CI. Quo hujusmodi expressio ad commodiorem formam reduci possit, determinanda est totius terrestris Sphoeroidis massa. Ad quod supponamus, ellipsim PEpQ circa axem Pp converti, ita ut Sphoerois producatur. Sit CM $= x$, ML $= y$, & ex ellipseos natura fiet $x = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2-y^2)}$. Posita itaque de more radii ad circumferentiam ratione $1 : \pi$, erit $1 : \pi :: \frac{a}{b}\sqrt{(b^2-y^2)} : \frac{\pi a}{b}\sqrt{(b^2-y^2)}$ circumferentiam descriptam motu puncti M circa C. Si vero quantitas haec per radii dimidium $\frac{a}{2b}\sqrt{(b^2-y^2)}$ multiplicetur, fiet superficies circuli ab RL descripti $\frac{\pi a^2}{2b^2}(b^2-y^2)$. Multiplicando autem per dy, & integrando habebitur solidi CQRL valor $\frac{\pi a^2 y}{2} - \frac{\pi a^2 y^3}{6b^2} = \frac{\pi a^2 b}{3}$, si fiat $y = b$. Si itaque hujuscemodi quantitas duplicetur, eruetur integrae Sphoeroidis valor $= \frac{2}{3}a^2\pi b = \frac{1}{2}\pi ba \times \frac{4}{3}a$. Sed $\frac{1}{2}\pi ba$ est superficies ellipseos $= A$. Ergo Sphoerois erit $\frac{4}{3}aA$.

CII. Si modo fiat $\frac{4}{3}aA = S$, & in formula vis inventae superius (n. c.) terrestris Sphoeroidis massae

valor introduci velit, ſubſtituenda erit loco A quantitas $\frac{3S}{4a}$; ideoque fiet vis in integram Sphoeroidem $\frac{12\phi(a^2-b^2)mnS}{60a}=\frac{\phi Smn(a^2-b^2)}{5a}$. Sed $\phi=\frac{3\beta t^2}{T^2}$ (n. xcvi.). Ergo $\frac{3\beta t^2 Smn(a^2-b^2)}{5aT^2}$ erit vis, qua Sol terreſtrem Sphoeroidem torquere nititur ex ſeptemtrionali polo ad meridionalem, ſeu angularem motum gignere in axe terreſtri.

CIII. Jam vero ſupponamus, in Solem Terrae axe angularem quemdam motum $=r$ producere. Eodem ipſo tempore quo terreſtris aequatoris particulae motu r circa diametrum AB (*fig.* 13) convertuntur, aequabili celeritate, eaque longe admodum majori moventur ex Occidente in Orientem per aequatoris circumferentiam ARFB. Sit itaque ARFB aequatoris ſitus eo tempore, quo particula quaevis aequatoris (quam veluti prorſus liberam conſideramus) eſt in R; ANZB autem ſit ejuſdem aequatoris ſitus ſecundo infinitesimo tempore, quo particula R diurno motu arcum RE, ſeu tangentem TM deſcripſiſſet. Particula R ex motu plani ARFB impulſu quodam affici debuit, quo in N pervenire poſſet, ideoque RN proportionali. Eodem autem tempore in M delata foret. Ergo in fine temporis, deſcripto parallelogrammo RNMV, particula reperietur in V. Cum vero circumferentia ARB magis diſtet a circumferentia

NB

ANB in puncto E, quam in R; particula R in fine secundi temporis a plano aequatoris distabit quantitate VC, si linea GHC parallela supponatur DN, ambae autem in plano aequatoris (52). In fine itaque secundi temporis quo particula R in plano aequatoris esse possit, necesse est, ut nova quadam actione perpendiculari ad aequatorem impellatur, qua lineam CV describere valeat, seu proportionali lineae CV, distantiae nimirum plani aequatoris ab eo loco, in quo particula versatur. Haec autem distantia semper immutatur, ideoque immutabitur etiam necessariae actionis intensitas, quae maxima esse debet in A, cum particula nullum ibi a plano impulsum accipiat, minima vero in F, ubi maximo afficitur plani impulsu. Quae autem erit hujusmodi actio, seu quae est ea vis, qua in compositione diurni, & angularis motus aequatoris particulae in eodem plano detineri, vel axeos motus r perpetuo conservari potest? Haec non difficili calculo dignosci poterit, si animadvertatur vim, qua aequatoris particula R describere debet CV, futuram esse ad vim centrifugam, ut CV ad ET spatium, quod vi centrifuga describeret; constat enim, vires ac-

(52) Distantiam CH nihili facimus, eo quod quantitas infinitesima sit tertii ordinis; CH enim exprimit spatium, quo tangens arcus MC ab eo recederet. Arcus autem MC supponitur infinite minor arcu RM, seu NV infinitesimo secundi ordinis.

celeratrices esse inter se in ratione spatiorum, quae ob earum impulsum eodem tempore describuntur. Cognita autem vi, qua Sol motum r terrestris axis, ideoque & Sphoeroidis gignere potest, per auream regulam eruetur motus superius inventa vi Solis in terrestrem Sphoeroidem infinitesimo tempore producendus.

CIV. Sit itaque quaesita vis $= v$, velocitas maxima motus angularis, seu velocitas in $F = r$; sint triangula D R N, G M C perpendicularia ad communem sectionem A O B; linea R N ad D R, M C ad G M, quae plano circuli A N B occurrat in C; agatur tangens N V parallela tangenti R M, quae cum diurni motus velocitatem exprimat, pro unitate assumetur. Sit demum R S parallela D G.

Velocitas particulae in F est $FZ = r.RM$, hoc est productum diurnae velocitatis in angularem propriam. Sed ex Trigonometria Sphoerica $ZF : RN ::$ $OF (= sin.\ AF) : sin.\ AR$, seu $r.RM : RN :: OF :$ DR. Ergo velocitas in puncto $R = RN = \frac{r.DR.RM}{OF}$.

At ob triangulum D R N simile G M C, $DR :$ $RN :: GM : MC$, scilicet $DR : \frac{r.DR.RM}{OF} :: DR + \ldots$ $SM : MC = \frac{r.RM.DR + r.RM.SM}{OF}$. Sed $MV = RN =$ $\frac{r.RM.DR}{OF}$. Ergo $MC - MV = CV = \frac{r.RM.SM}{OF}$.

Jam vero centrifuga vis β in circumferentiae arcu infinitesima $RM = sin.\,v.\,RM = \frac{RM^2}{2OF}$. Ergo C V

erit ad effectum vis centrifugae, ut $\frac{r.RM.SM}{OF} : \frac{RM^2}{2OF} ::$ $2r.SM:RM::2r.OD:OA$, cum sit $OD:OA::$ $SM:RM$. Ergo CV, seu $v:\beta::2r.OD(=2r\times$ $cos. AR):OA$; & si fiat radius $OA=1$, erit $v=$ ... $2r\beta\, cos. AR$, formula, qua v demonstratur proportionalis distantiae a plano per FO transeunte perpendiculariter ad figuram; a plano scilicet, in quo fit axeos motus; ideoque maxima in A, minima in F, ubi aequatur $2r\beta$, eo quod in A $cos. AR=1$, in $F=0$.

CV. Eadem methodo, qua superiori numero invenimus, vim eam, qua singulae particulae, quibus terrestris aequatoris peripheria constituitur, in compositione angularis, & diurni motus in aequatoris plano detineri possunt, aequari facto ex duplo angulari motu in vim centrifugam ducto in distantiam singularum particularum a plano, in quo fit axeos motus, & per radium diviso, demonstrari potest, eamdem rationem sequuturam esse vim, qua particula quaevis ex iis, quibus quicumque annulus GIK aequatoris peripheria contentus coalescit, in aequatoris ejusdem plano detineri potest, aeque ac eam, qua aequatori parallelorum particulae in sui quaeque circuli plano. His autem in locis cum non eadem sit vis centrifuga, quae in aequatoris peripheria, ejus expressio immutanda est.

CVI. Cum itaque vis centrifuga in eodem plano proportionalis sit radiis, si ea in F dicatur β, erit OF:

β::

$\beta :: OI : \frac{\beta . OI}{OF}$ vim centrifugam in I. Ergo vis neceſſaria ad corpuſculum I in ſuo plano detinendum, erit $2 r\beta . \frac{OI}{OF}$, ex iis elementis conſtans, quibus ea conſtat, quae pertinet ad F.

CVII. Quo autem vis centrifugae expreſſio in quocumque parallelo inveniatur, ſupponamus, planum circuli GLIK perpendiculariter ad planum figurae elevari, ita ut I ſit polus exigui illius circuli, cujus diameter eſt GK. Hoc in caſu QO aequalis erit radio circuli motu particulae L deſcripti, ideoque fiet, ut in numero ſuperiori, $OI : \beta \frac{OI}{OF} :: OQ : \beta \frac{OQ}{OF}$ vim centrifugam in circumferentia paralleli; indeque vis neceſſaria, ut corpuſculum in cujuſvis paralleli plano detineatur, erit $\frac{2 r\beta . OQ}{OF}$, ſcilicet proportionalis OQ, ſeu diſtantiae corpuſculi a plano per OF tranſeunte perpendiculariter ad figuram, ab eo nimirum, in quo ſit axeos motus, prorſus ut ſupra (n. CIV.).

CVIII. Supponamus modo, parallelum quemcumque GFHE (*fig.* 10.) compoſitum ex infinitis concentricis annulis moveri uniformiter circa centrum C, & axem PCL diurnae rotationis velocitate = 1 ſub aequatore, eodem tempore, quo centrum C, & linea OC feruntur per circumferentiam PQR angulari velocitate r. Motus ille, qui vim expoſcit, qua periphe-

riae

riae G H, & cujufvis annuli ab ea contenti particulae in fuo loco detineantur, communis effe non debet centro, & peripheriae tum paralleli, tum annulorum; hoc enim in casu particulae nullatenus fitu fuo exturbarentur. Motus ergo, qui hujufmodi vim requirit, aequatur motui illi, quo particulae peripheriae G E H F, & annuli cujufvis afficerentur, fi circulus rotaret circa diametrum fuam immotam, & normalem ad planum figurae. Sed vis, quam motus hujufmodi requirit, proportionalis eft diftantiae particulae a plano, in quo fit axeos motus (n. cvii.). Hanc ergo proportionem vis ea fequi debet, qua fuo in loco detineri poffunt particulae paralleli cujufvis ex quibufcumque annulis compofiti.

CIX. Ex iis ergo quae fupra prolata funt a n. civ. ad cviii. colligitur, terreftris Sphoeroidis particulas fingulas, ut axis motus angularis r confervari poffit, follicitari debere Solis actione vi quadam normali ad aequatorem, feu parallelam axi, quae ad aequatorem fit $2\,r\,\beta$ in extremitatibus diametri, circum quam aequator revolvitur; ubicumque vero proportionalis diftantiae fingularum particularum a plano meridiani perpendicularis ad hanc ipfam diametrum, a plano fcilicet, in quo fit axeos motus.

CX. Jam vero fi fingulae particulae Sphoeroidis E P Q p (*fig.* 14.) follicitentur viribus parallelis axi P p proportionalibus diftantiae particularum fingularum a pla-

a plano transeunte per Pp, quemadmodum fieri debet, ut aequator a septemtrionali polo versus meridionalem feratur motu r (n. cix.); duo autem Sphoeroidis dimidia aequaliter, & contrario sollicitentur; summa harum omnium virium, seu totalis vis efficacia ad Sphoeroidem circa suum centrum convertendam, erit quinta pars illius, quae locum haberet, si particulae omnes Sphoeroidis in unum coirent ad distantiam CQ a radio aequatoris.

Et re quidem vera sit $CQ = a$, ellipseos $EPQp$ superficies $= A$, ϕ vis agens in particulam sitam ad distantiam CQ, seu ea vis, quam superius invenimus $2r\beta$ (n. civ.), CM distantia sectionis meridiano parallelae $= x$. Haec Sectio, quae diametrum habet LN, esse debet ellipsis similis meridiano EPp; & cum ex ellipseos natura $CP^2 : LM^2 :: a^2 : a^2 - x^2$ latus homologum minoris ellipseos, si major ellipsis sit A, minor erit $\frac{A(a^2 - x^2)}{a^2}$, eo quod similes figurae planae sint ut quadrata laterum homologorum. Sed vis in Q est ex hyp. ad vim in M ut $a : x$; ergo $a : x :: \phi : \frac{\phi x}{a}$; ergo vis in M erit $\frac{\phi x}{a}$; & summa virium omnium in minorem ellipsim erit $\frac{A\phi x(a^2 - x^2)}{a^3}$. Cum vero haec vis duci debeat in distantiam x (n. xcvii.), erit $\frac{A\phi x^2(a^2 - x^2)}{a^3}$ integra vis, qua minor ellipsis Sphoeroidem circa centrum convertere nititur.

Con-

Concipiatur modo alia ſectio huic infinite proxima lmn, & per earum diſtantiam $Mm = dx$ multiplicetur inventa modo vis, fietque $\frac{A\varphi(a^2 - x^2)}{a^2} \times \frac{x^2 dx}{a}$ vis in $LNln$, quae integrata exhibet $A\varphi \times \left(\frac{x^3}{3a} - \frac{x^5}{5a^3}\right) = \frac{2Aa^2\varphi}{15}$ (ſi fiat $x = a$) vim in Sphoeroidis dimidium; ideoque $\frac{4}{15}Aa^2\varphi$ erit vis in integram Sphoeroidem. Sed maſſa integrae Sphoeroidis, quam diximus $S = \frac{4}{3}aA$ (n. ci.). Ergo $\frac{4}{15}Aa^2\varphi (= \frac{4}{3}aA \times \frac{1}{5}a\varphi) = \frac{1}{5}a\varphi S$. Sed ſi materies omnis integrae Sphoeroidis in unum coiret in puncto Q, ſcilicet ad diſtantiam a a radio aequatoris, cum vis in eo caſu aequalis eſſe debeat vi in puncto $Q = \varphi$ ductae in diſtantiam, & maſſam, eſſet vis integra $Sa\varphi$. Ergo vis in integram Sphoeroidem eſt quinta pars illius qua eadem maſſa afficeretur ſi omnis eſſet in Q.

Vis ergo $\frac{1}{5}Sa\varphi = \frac{2}{5}ar\beta S$ (ob $\varphi = 2r\beta$) neceſſaria eſt, ut axis Terrae angularis motus r habeatur.

CXI. Particulae itaque terreſtris Sphoeroidis naturalem ordinem ſervabunt in compoſitione angularis, & diurni motus, ſi vis, qua angularis motus r gignitur, quamque V dicimus aequalis eſt $\frac{2}{5}Sar\beta$. Cum itaque ſit $V = \frac{2}{5}Sar\beta$, erit $r = \frac{V}{\frac{2}{5}Sa\beta}$.

CXII. Oſtendimus num. cx. vim $\frac{2}{5}Sar\beta$ in integram terreſtrem Sphoeroidem exercitam angularem

 motum

motum r gignere posse; numero autem CII. vim qua Sol integram Sphoeroidem convertere niti debet, invenimus $= \frac{3\beta S t^2 mn(a^2-b^2)}{5aT^2}$. Ergo erit $\frac{2Sar\beta}{5} : r :: \frac{3\beta S t^2 mn(a^2-b^2)}{5aT^2} : \frac{3t^2 mn(a^2-b^2)}{2a^2T^2}$. Si ergo diurnae rotationis motus loco unitatis assumatur, angulus, quem actione Solis Terrae axis infinitesimo tempore describet, erit $= \frac{3t^2 mn(a^2-b^2)}{2a^2T^2}$. Patet autem ex iis, quae num. LXII. prolata sunt, hac eadem quantitate aequinoctiale punctum retrocedere videri debere.

CXIII. Differentialis iste angulus $\frac{3t^2 mn(a^2-b^2)}{2a^2T^2}$ idem est, ac angulus, quem verus aequator cum aequatore medio constituit. Sed cum declinatio Solis, seu m, n valor (n. XCIX.) non idem semper habeatur, anguli hujus valor non idem semper habebitur. Exquirendum itaque quid inde fiat post finitum tempus, ut innotescat angularis terrestris axeos motus quantitas, indeque apparens aequinoctialis puncti retrocessio in tribus mensibus, cum idem redit m, n valor; hinc autem in alio quocumque tempore.

In eclipticae itaque ESL (*fig.* 15) puncto S sit Sol declinationem habens AS. Sit EAC aequator, BAD aequatoris ejusdem vi Solis nova positio cum priori positione angulum BAE constituens: in superiori au-

tem

tem anguli expressione ponatur k loco $\frac{m^2 - k^2}{e}$. Erit angulus BAE $= \frac{3 t^2 k m n}{2 T^2}$. Jam vero in triangulo sphoerico BAE, qui angulum A infinitesimum habet, $sin.$ B : $sin.$ EA :: $sin.$ A : $sin.$ BE :: A : BE. Ergo BE, seu retrocessio puncti aequinoctialis B secundum eclipticam infinitesimo tempore $= \frac{A\ sin.\ EA}{sin.\ B} = \ldots \frac{3 t^2 k m n\ sin\ adscens.\ rectae}{2 T^2\ sin.\ 23^\circ \frac{1}{2}}$, puncto enim A Sol respondet eo tempore, quo exiguum aequatoris motum supputavimus; quo scilicet sinus declinationis $= m$. Differentialis ergo angularis motus terrestris axis vi Solis erit $\frac{3 t^2 k m n\ sin.\ adsc.\ rect.}{2 T^2\ sin.\ 23^\circ \frac{1}{2}}$ ad commodiorem formam reducenda.

CXIV. Cum aequator EAC ad positionem BAD transit, ad eclipticam accedit super solstitiorum colurum LDC spatiolo CD. Ergo CD exigua nutatio est ex hoc aequatoris motu exorta, cujus valor facili quidem calculo erui potest. In triangulo sphoerico CAD, facto radio $= 1$, habetur $1 : sin.$ AC, sive $cos.$ AE :: $sin.$ A . $sin.$ CD :: A : CD $=$ A $cos.$ AE $= \ldots \frac{3 t^2 k m n\ cos.\ AE}{2 T^2}$.

Si vero in hac formula longitudo solaris introduci velit, ut commodior adhuc evadat, in triangulo sphoerico EAS rectangulo in S, in quo AS Solis

 de-

declinationem indicat, EA adscentionem rectam, ES longitudinem, sit $ES = z$, *sin.* $ES = x$, *cos.* longi. $= y$, *sin.* AES; seu *sin.* $23°\frac{1}{2} = p$, *cos.* $23°\frac{1}{2} = q$. Ex regulis Trigonometriae Sphoericae $1 :$ *sin.* ES :: *sin.* E : *sin.* AS $= px$, pariterque $1 :$ *cos.* AE :: *cos.* AS : *cos.* ES $= y =$ *cos.* AE *cos.* AS. Ergo cosinus declinationis, ductus in sinum declinationis, & in cosinum adscensionis rectae $= pxy$. Ergo mn *cos. adsc. re.* $= pxy$. Ergo differentialis nutationis $CD = \frac{3t^2kpxy}{2T^2}$.

CXV. Quoniam haec quantitas fractio est diurni motus, quem unitatis loco assumpsimus, si multiplicetur per $366\frac{1}{4}$, seu per $\frac{T}{t}$, erit eadem fractio motus annui, fietque $\frac{3tkpxy}{2T}$. Multiplicando itaque per hanc quantitatem quamcumque partem annui motus, ex. gr. arcum eclipticae SB (*fig. 6.*) $= dz$ a Sole descriptum infinitesimo tempore fiet $\frac{3tkpxydz}{2T}$. Jam vero cum SQ sit sinus long. $= x$, CQ cosinus long. $= y = \sqrt{(1 - x^2)}$, si fiat $SC = 1$. Sed in triangulis SFB, SCQ, $SB = dz = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$. Si itaque in superiori formula substituantur valores y, & dz, fiet differentialis nutationis $= \frac{3tkpxdx}{2T}$, cujus integralis $\frac{3tkpx^2}{4T}$ exhibet nutationem totalem tempore, quo Sol arcum eclipticae $= z$ describit.

CXVI.

CXVI. Jam vero aequinoctialis puncti retrocessionis, seu BE (*fig.* 15) totalis quantitas in tempore finito exquirenda est. Fiant itaque duae trigonometricae proportiones $ER:CD::sin.EA:sin.CA$, seu $cos.EA::tang.EA:1$, & $EB:ER::1:sin.B$; quarum respondentes termini si invicem ducantur fiet $EB:CD::tan.EA:sin.B$. Sed $1:cos.E::tang.ES:tang\,EA$ $=cos.E\,tang.ES=cos.E\frac{sin.ES}{cos.ES}=\frac{qx}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Ergo $EB:CD::\frac{qx}{\sqrt{(1-x^2)}}:p$, & substituendo valorem CD, $EB:\frac{3tkpxdx}{2T}::\frac{qx}{\sqrt{(1-x^2)}}:p$. Ergo $EB=\frac{3tkqx^2dx}{2T\sqrt{(1-x^2)}}$, qua formula differentialis aequinoctialis puncti retrocessionis vi Solis exprimitur. Quoniam autem .... $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{z-x\sqrt{(1-x^2)}}{2}$, erit $\int\frac{3tkqx^2dx}{2T\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{3tkq[z-x\sqrt{(1-x^2)}]}{4T}$. Haec igitur expressio indicat aequinoctialis puncti retrocessionem eo tempore quo Sol describit arcum eclipticae z.

Altera hujusce formulae pars $-x\sqrt{(1-x^2)}$ variabilis quantitas est, quae cum 1" non excedat negligi potest. Maximi autem momenti est prior pars ... $\frac{3tkqz}{4T}$, ex qua patet aequinoctialis puncti retrocessionem continuo augeri, prout augetur Solis longitudo z.

CXVII. Ut expreſſionis hujuſce numericus valor eruatur animadvertendum eſt, poſt tres menſes fieri $z = 90^{\circ} = 324000''$; $x = 1$; $q = 0, 917$; $t = 1$ d.; . . . $T = 365, 256$ d. $k = \frac{1}{178}$. Hos itaque numeros ſubſtituendo fiet $\frac{3\,t\,k\,q\,z}{4\,T} = 5'', 28$.

Ergo ex Newtoniano Syſtemate Sol Terrae axem ſitu ſuo ita exturbare debet, ut aequinoctialia puncta regredi videantur 5", 28 ſingulis tribus menſibus, & 21", 12 toto anno, ideoque ſingulis annis aequinoctiorum Praeceſſio habeatur (n. LXXXIV.) 21", 12, ſi Terra homogenea ſit, ejusque idcirco ad polos depreſſio $\frac{1}{230}$. Cum vero Tellus heterogenea ſit, Praeceſſionis quantitas vel 14" $\frac{1}{2}$ eſſe debet, vel 16" non excedere; quod nobis in poſterum demonſtraturis (n. penul.), in praeſens aſſumere liceat.

CXVIII. Sed Telluri longe proximior Luna validiorem longe in eam exercere debet perturbatricem vim. Vis itaque ſolaris effectum lunaris modo perpendendum aggredimur. Id vero ex iis quae de Sole protulimus facile deduci poteſt, ſi ea omnia accomodantes Lunae nodorum locum in calculum introducamus.

Sit itaque (*fig.* 16) ♈B ecliptica, quam immobilem ſupponimus, ♈ED♎F aequator in prima poſitione, AGDBH aequator idem e ſua poſitione a Luna exturbatus in infiniteſimo tempuſculo, EGNFH

luna-

lunaris orbita cujus nodus fit in N, fitque angulus N = 5°, 8', 46" media lunaris orbitae inclinatio. Dicatur longitudo nodi = ♈N = z, *sin.* ♈N long. nodi = x, ejus autem *cos.* = y, *sin.* ♈ = *sin.* 23° $\frac{1}{2}$ = a, *cos.* ♈ = b, *sin.* N = *sin.* 5°, 9' = c, *cos.* N = g, *circumfer.* 6, 28 = e, 27 dies = t tempus integrae revolutionis nodi fcilicet 18 anni = n, 365 dies = t.

Solis actio 14" $\frac{1}{2}$ Praeceffionis gignit. Cum itaque Lunae maffa 2 $\frac{1}{2}$ vicibus valentior fit maffa Solis (53) effectum duplum cum dimidio majorem, ceteris paribus, gignere deberet. Sed non idem eft tempus periodicum Lunae, & Solis, feu tempus, quo Sol, & Luna agunt in Terram ad Praeceffionem producendam. Ergo folaris, & lunaris Praeceffio effe debet in ratione compofita vis, & temporis, quo vis exercetur. Si itaque vis in genere dicatur m, folaris Praeceffio p, erit lunaris Praeceffio $\frac{mpt}{T}$ tempore t in plano orbitae lunaris, pofito quod ejufdem ad aequatorem inclinatio fit 23° $\frac{1}{2}$. Si vero inclinationis angulus minor effet ipfis 23° $\frac{1}{2}$, major haberetur aequinoctiorum Praeceffio in ratione cofinuum inclinationis; in formula enim $\frac{3tkqq}{4T}$ (n. CXVI.) loco q haberetur *cos.* E, ideo-

(53) V. *De la Lande Aftr. T. III. n.* 3412.

ideoque expressio $\frac{mpt}{T}$ duci deberet in *cos.* E, & per *cos.* 23° $\frac{1}{2}$ dividi. Tunc itaque lunaris Praecessio EG unius periodicae lunaris revolutionis tempore fieret $\frac{mpt\,cos.E}{T\,cos.23°\frac{1}{2}}$ in orbita lunari.

CXIX. Sed a lunari orbita quantitas haec ad eclipticam referri debet, in qua aequinoctiorum Praecessio supputatur. Id vero ut fiat observandum est, Lunam, cum per aequatorem transit, seu cum dimidiam explevit revolutionem, eamdem semper producere debere terrestris axeos inclinationem; exiguae enim ejusdem axeos mutationes tunc incipiunt, cum Luna suam incipit circa Tellurem revolutionem. Posito autem, quod lunaris nodus non moveatur per integrum mensem, Luna in dimidia revolutione ex H in G maximam in aequatoris situ differentiam gignet. In puncto itaque D medio inter G, & H, ubi lunaris orbita aequatorem intersecat mobilis aequator aequatorem primitivum intersecabit. Igitur DE = DF = 90°. Sed S solstitiale punctum est, Ergo ♈S = 90°, ita ut DS = ♈E.

In triangulo autem sphoerico DEG, 1 : *sin.* G :: *sin.* EG : *sin.* D :: EG : D = EG *sin.* G = EG *sin.* E. In triangulo pariter sphoerico ♈DA, *sin.* A : *sin.* ♈D, seu *cos.* ♈E :: *sin.* D : *sin.* ♈A :: D : ♈A = $\frac{D\,cos.♈E}{sin.A}$ = . .

EG

$\frac{EG\ sin.\ E\ cos.\ \Upsilon E}{sin.\ 23^\circ\frac{1}{2}} = \frac{mpt\ sin.\ E\ cos.\ E\ cos.\ \Upsilon E}{T\ sin.\ \Upsilon\ cos.\ \Upsilon}$, qua formula exprimitur Praecessionis lunaris in uno mense valor in ecliptica supputatus. Quae Praecessio cum variari singulis mensibus debeat ob variationem anguli E; pro differentiali Praecessionis in 18. annis assumetur.

CXX. Lineola RS exprimit Nutationem vi Lunae in uno mense productam, cujus valor ex Trigonometria facile eruitur. In triangulo sane SRD, $1 : sin.\ DS :: D : RS = D\ sin.\ DS = D\ sin.\ \Upsilon E$ (n. CXIX.). Sed $D = EG\ sin.\ E$. Ergo $RS = EG\ sin.\ E\ sin.\ \Upsilon E = \frac{mpt\ cos.\ E\ sin.\ E\ sin.\ \Upsilon E}{T\ cos.\ \Upsilon}$. In hac autem expressione substituere oportet inclinationem N, & nodi longitudinem ΥN, quarum prima pro constanti, altera pro uniformi haberi potest. Cum itaque sit $sin.\ E : sin.\ \Upsilon N :: sin.\ N : sin.\ \Upsilon E$, erit $RS = \frac{mpt\ sin.\ N\ sin.\ \Upsilon N\ cos.\ E}{T\ cos.\ \Upsilon}$.

Ex hac autem formula eliminandus est angulus E variabilis ob nodorum lunarium motum. In triangulo sphoerico itaque ΥEN, $cos.\ E = cos.\ \Upsilon N\ sin.\ N\ sin.\ \Upsilon - cos.\ N\ cos.\ \Upsilon = yca - bg$. Cum vero angulus E obtusus sit, ideoque perpendicularis cadat extra triangulum, $cos.\ E$ negativus erit, unde $cos.\ E = bg - acy$, & $RS = \frac{cmptx(bg - acy)}{bT}$, si nodus supponatur in N.

Nos formulam hanc pro differentiali habebimus, quae integrata Nutationem omnem exhibebit post absolutam a nodo periodum suam.

CXXI. Jam vero hujusmodi differentialis per differentialem longitudinis nodi $= dz$ exprimi debet. Tempus itaque periodicum Lunae t, est ad tempus integrae revolutionis n nodi, ut motus medius nodi in uno mense $= dz$ ad integram circumferentiam circuli $= e$. Ergo $t : n :: dz : e$, unde $t = \frac{n dz}{e} = \frac{n dx}{e\sqrt{(1 - x^2)}}$ (n. cxv.). Si itaque supponatur $T = 1$, ita ut $n = 18,6$, substituaturque valor t, & y (n. cxv.), fiet differentialis Nutationis $= \frac{cmnp(gbxdx - acxdx)}{be\sqrt{(1 - x^2)}}$, quae integrando fit $\frac{cmnp}{be}(-gb\sqrt{(1 - x^2)} - \frac{1}{2}acx^2)$.

Sed cum $x = o$, in puncto scilicet aequinoctiali Nutationem nullam esse oportet, eo quod ex illo puncto Lunae actio incipiat; in superiori autem integrali, cum $x = o$, superest $- gb$; ergo quantitas $+ gb$ adjicenda est, ideoque integralis completa erit $\frac{cmnp}{be} \times (bg - bg\sqrt{(1 - x^2)} - \frac{1}{2}acx^2)$. Et quoniam quadratum sinus aequale est dimidio sinui verso duplicis arcus, fiet integralis completa $\frac{cmnp}{be}(bg\, sin.v.z - . . \frac{1}{4}ac\, sin.v.2z)$. Haec ergo erit totalis Nutatio Lunae actione producta eo tempore, quo nodus spatium ♈N descripsit, quae in minuta secunda reduci potest.

CXXII.

CXXII. Cum differentialis Praeceffionis fit . . . . $\frac{mpt\, sin.\, E\, cos.\, E\, cos.\, \Upsilon E}{T\, sin.\, \Upsilon\, cos.\, \Upsilon}$, erit illa ad differentialem Nutationis $\frac{mpt\, cos.\, E\, sin.\, E\, sin.\, \Upsilon E}{T\, cos.\, \Upsilon}$, ut $\frac{cos.\, \Upsilon E}{sin.\, \Upsilon}$: . . . . $sin.\, \Upsilon E :: cot.\, \Upsilon E : sin.\, \Upsilon$; unde differentialis Nutationis per $\frac{cot.\, \Upsilon E}{sin.\, \Upsilon}$ multiplicata exhibebit differentialem Praeceffionis. Sed ex Trigonometria $cot.\ \Upsilon E = \frac{ag + bcy}{cx}$. Ergo $\frac{cot.\, \Upsilon E}{sin.\, \Upsilon} = \frac{ag + bc\sqrt{(1 - x^2)}}{acx}$. Multiplicando itaque per hanc quantitatem Nutationis differentialem $\frac{cmnp}{be}\left(\frac{bgx}{\sqrt{(1-x^2)}} - acx\right)dx$ fiet differentialis Praeceffionis $\frac{mnp}{abe}\left[\frac{abg^2}{\sqrt{(1-x^2)}} + (b^2 - a^2)gc - abc^2\sqrt{(1 - x^2)}\right]dx$; quae formula integrata, fi dicatur z arcus ille, cujus finus eft x, evadet $\frac{mpn}{abe}(ag^2bz + (b^2 - a^2)gcx - \frac{1}{2}abc^2z - \frac{1}{2}abc^2x\sqrt{(1 - x^2)})$, feu $\frac{mpn}{abe} \times ((g^2 - \frac{1}{2}c^2)abz + (b^2 - a^2)gc\, sin.\, z - \frac{1}{4}abc^2\, sin.\, 2z)$.

CXXIII. Jam vero numeris exprimendus eft valor tum Nutationis, tum Praeceffionis. Ad quod obfervandum eft, cum lunaris nodus dimidiam abfolvit revolutionem, fieri $z = 180°$, cujus finus verfus $= 2$. Sinus autem verfus $2z = 360° = 0$. Ergo poft abfolu-

tam

tam dimidiam revolutionem nodi lunaris, Nutatio $\frac{mpcn}{eb}(gb\,sin.\,v\,.\,z - \frac{1}{2}ac\,sin.\,v\,.\,2z)$ evadet $\frac{2mpncg}{e}$. Quae quidem expressio si sit $m = 2\frac{1}{2}$, $p = 14''\frac{1}{12}$, reducitur ad $19''$, 2. Quod si autem Bradleii observationibus fides haberi velit Nutationem $= 18''$ statuentis, supponi debet $m = 2, 09$; $p = 16''$, 28, & tunc eruitur Nutationis quantitas $= 18''$.

CXXIV. Quo autem & Aequinoctiorum Praecessionis quantitas numeris exprimi possit, supponendum est, nodum dimidiam confecisse revolutionem. Tunc $z = \frac{1}{2}e$, $sin.\,z$, & $sin.\,2\,z = o$. Evanescentibus itaque duobus extremis terminis inventi superius valoris, integra Praecessio fit $\frac{1}{2}mpn(g^2 - \frac{1}{2}c^2)$; & quoniam $g^2 = 1 - c^2$ reducitur ad $\frac{1}{2}mpn(1 - \frac{3}{2}c^2)$. Ergo tempore unius integrae revolutionis nodi lunaris, seu in 18 annis Praecessio dupla erit hujusce quantitatis, hoc est $mpn(1 - \frac{3}{2}c^2)$.

CXXV. Patet ex hac formula, mediam Praecessionem Aequinoctiorum Lunae actione productam esse ad Praecessionem mpn, quae locum haberet, si Luna in ecliptica revolveretur (n. CXVIII.) ut $1 - \frac{3}{2}c^2 : 1 ::$ $o, 9879 : 1$.

CXXVI. Quod si autem comparetur formula numeri CXXIII. cum formula numeri CXXIV. apparebit, Nutationis quantitatem, quam 18″ statuimus unius me-

diae

diae revolutionis tempore esse ad Praecessionem eo tempore, ut $\frac{4cg}{e} : 1 - \frac{3}{2}c^2 :: 1 : 17,35$.

CXXVII. Praecessionis inaequalitas, seu aequatio inveniri potest, si ex Praecessione vera in dato tempore subtrahatur Praecessio media in eodem tempore. Sit z longitudo nodi in quodam temporis spatio. Cum sit media Praecessio in dimidia nodi revolutione $\frac{1}{2}mpn(g^2 - \frac{1}{2}c^2)$ (n. CXXIV.), erit $\frac{1}{2}e : \frac{1}{2}mpn(g^2 - \frac{3}{2}c^2) :: z : \frac{z}{e}mpn(g^2 - \frac{1}{2}c^2)$, qua formula exprimitur media Praecessio in tempore, quod arcui z respondeat. Hujusmodi media Praecessio si subtrahatur a vera, quam numero CXXII. invenimus, exhibebit $\frac{mpn}{abe} \times ((b^2 - a^2)gc\, sin.\, z - \frac{1}{4}abc^2\, sin.\, 2z)$.

Si vero negligatur secundus terminus, quo quadratum finus c anguli 5° continetur (quod errorem majorem $\frac{1}{4}''$ producere nequit) maxima aequatio Praecessionis, cum nodus in solstitio versatur, cum scilicet $sin.\, z = 1$, erit $\frac{mpncg}{abe}(b^2 - a^2)$.

CXXVIII. Inaequalitas haec Praecessionis est ad Nutationem 18'', seu ad $\frac{2mpncg}{e} :: b^2 - a^2 : 2ab :: 1 : \frac{2ab}{b^2 - a^2}$. Ex hac autem ratione determinatur Praecessionis ipsiusmet aequatio ex observata latitudine Nutationis, & inde quae Praecessionis quantitas tum a

Luna

Luna (*n.* LXXXVI.), tum a Sole gignatur, ex quo corrigitur error, qui ex hypothesi homogeneae Telluris in calculum irrepere debuit. Si enim cum Bradleyo statuamus, Nutationem esse 18", maxima Praecessionis aequatio erit 16", 8, Praecessio a Sole producta 16", 3, a Luna autem 33", 7. Quod si supponatur cum la Landio 1" error in Bradleii observationibus, scilicet si Nutatio sit 19", tunc maxima aequatio erit 17", 8, solaris Praecessio 14", 5, lunaris vero 35", 5. Quae posterior hypothesis vim Lunae ad vim Solis in ea proxime ratione constituit, quae inter 5, & 2 intercedit; unde ex ea observationes Nutationis cum marini aestus phaenomenis facile conciliantur; quod jam Physicis terrestria astronomicae doctrinae consectaria exquirentibus relinquendum est.

CXXIX. Ex iis, quae usque hactenus demonstrata sunt plane constat, non modo ea quaecumque Copernicani Systematis veritas expostulat in rerum natura locum habere; sed etiam ex eo difficiliora coelestia phaenomena tum exoriri debere, tum miro quodam ordine, ac Geometrica evidentia explicari.

Quod ergo sub initium Dissertationis nostrae proposueramus, Copernicanam de Mundi Systemate opinionem a Newtono perfectam unam veram esse patet luculentissime. Si quae enim esse potest physici systematis invicta demonstratio, haec in eo potissimum

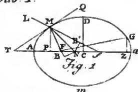
sita

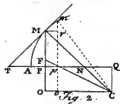
ſita eſt, ut phaenomena quaeque non modo ex ſyſtematis principiis explicari poſſint, ſed etiam neceſſario habenda eſſe ſeveriori calculo appareat.

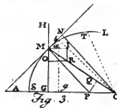
FINIS.

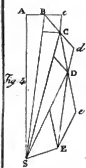
pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE
8	10	*Ecel.*	*Ecl.*
28	8	$q' \, d \, s'$	$q' \, d \, s' =$
29	20	$r = \frac{n^3}{\frac{1}{2} p^2}$	$r = \frac{n^3}{\frac{1}{4} p^2}$
47	22	*fig.* 4	*fig.* 3
51	9	*z* valor	*c* valor
62	12	*fig.* 9	*fig.* 8
69	1	Aequatorem	ad Aequatorem
72	25	axem	basim
74	5	$CA \frac{2 \times 73 R}{5 \times 4400}$	$CA = \frac{2 \times 73 R}{5 \times 4400}$
----	20	$CA \frac{1}{415} M$	$CA = \frac{1}{415} M$
90	8	sed quae sub aequatore elatiores sunt vividiori	sed eae praesertim, quae sub aequatore elatiores sunt vividiori longe
94	16	virga	virgae
95	7	$\frac{a^2 c m}{b m}$	$\frac{a^2 c m}{b \mu}$
100	2	$3a(1 + b$	$3a(1 + b)$
----	11	(quaecumque ea sit considerans)	(quaecumque ea sit) considerans
110	20	n. XV.	n. XVI.
114	8	in Solem	Solem in
119	19	parallelam	parallela
123	19	*sin.* A.	*sin.* A:
126	4	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{115}$
----	18	effectum	effectum perscrutati
----	20	omnia	omnia Lunae

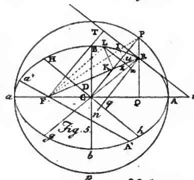
Tab. I.

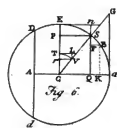


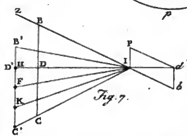


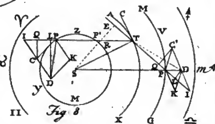






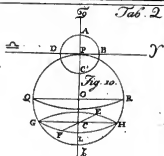




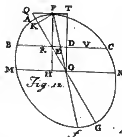


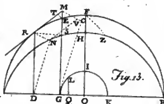
Tab. 2

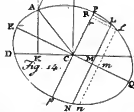
Fig. 9

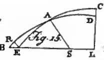

A
D
P
B
C'
Fig. 10.
O
Q
R
E
G
C
H
F
L

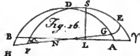

A
D
Fig. 11.
B


Q
F
T
A
K
B
D
V
C
E
M
H
O
N
Fig. 12.
f
G


M
T
F
E
V
C
R
N
H
Z
I
L
Fig. 13.
A
D
G
Q
O
K
B


S
A
P
R
L
l
E
D
K
C
M
m
d
Fig. 14.
Q
p
N
n


C
A
D
R
Fig. 15.
B
E
S
L


D
S
Fig. 16.
E
G
B
N
L
A
H

